

§5. Xác suất của biến cố

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nếu A là biến cố liên quan đến phép thử chỉ có một số hữu hạn các kết quả đồng khả năng xuất hiện thì tỉ số $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ được gọi là *xác suất* của biến cố A . Xác suất có các tính chất sau :

a) $P(A) \geq 0, \forall A$;

b) $P(\Omega) = 1$;

c) Nếu A và B là hai biến cố xung khắc cùng liên quan đến phép thử thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(công thức cộng xác suất).

Mở rộng : Với hai biến cố A và B bất kì cùng liên quan đến phép thử thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

2. Hai biến cố A và B được gọi là *độc lập*, nếu sự xảy ra của một trong hai biến cố không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Người ta chứng minh được rằng, A và B độc lập khi và chỉ khi

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ngoài ra, A và B độc lập $\Leftrightarrow \bar{A}$ và B độc lập $\Leftrightarrow A$ và \bar{B} độc lập $\Leftrightarrow \bar{A}$ và \bar{B} độc lập.

3. $P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$; $P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

B. VÍ DỤ

• Ví dụ 1

Lấy ngẫu nhiên một thẻ từ một hộp chứa 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Tìm xác suất để thẻ được lấy ghi số

- Chẵn ;
- Chia hết cho 3 ;
- Lẻ và chia hết cho 3.

Giải

Không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, \dots, 20\}$. Kí hiệu A, B, C là các biến cố tương ứng với câu a), b), c). Ta có :

a) $A = \{2, 4, 6, \dots, 20\}$, $n(A) = 10$, $n(\Omega) = 20 \Rightarrow P(A) = \frac{10}{20} = 0,5$.

b) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $P(B) = \frac{6}{20} = 0,3$.

c) $C = \{3, 9, 15\}$, $P(C) = \frac{3}{20} = 0,15$.

• Ví dụ 2

Một lớp có 60 sinh viên trong đó 40 sinh viên học tiếng Anh, 30 sinh viên học tiếng Pháp và 20 sinh viên học cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên. Tính xác suất của các biến cố sau

- A : "Sinh viên được chọn học tiếng Anh" ;
- B : "Sinh viên được chọn chỉ học tiếng Pháp" ;
- C : "Sinh viên được chọn học cả tiếng Anh lẫn tiếng Pháp" ;

d) D : "Sinh viên được chọn không học tiếng Anh và tiếng Pháp".

Giải

Rõ ràng $P(A) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ và $P(A \cap B) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$.

Từ đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

và $P(D) = P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

Đó là xác suất chọn được sinh viên không học cả tiếng Anh lẫn tiếng Pháp.

• **Ví dụ 3**

Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất sao cho tổng số chấm trong hai lần gieo là số chẵn.

Giải

Kí hiệu A : "Lần đầu xuất hiện mặt chẵn chấm" ;

B : "Lần thứ hai xuất hiện mặt chẵn chấm" ;

C : "Tổng số chấm trong hai lần gieo là chẵn".

Ta có $C = AB \cup \overline{A}\overline{B}$. Dễ thấy AB và $\overline{A}\overline{B}$ xung khắc nên

$$P(C) = P(AB) + P(\overline{A}\overline{B}).$$

Vì A và B độc lập nên \overline{A} và \overline{B} cũng độc lập, do đó

$$P(C) = P(A)P(B) + P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

C. BÀI TẬP

5.1. Một tổ có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên hai người. Tìm xác suất sao cho trong hai người đó :

- Cả hai đều là nữ ;
- Không có nữ nào ;
- Ít nhất một người là nữ ;
- Có đúng một người là nữ.

- 5.2.** Một hộp chứa 10 quả cầu đỏ được đánh số từ 1 đến 10, 20 quả cầu xanh được đánh số từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên một quả. Tìm xác suất sao cho quả được chọn :
- Ghi số chẵn ;
 - Màu đỏ ;
 - Màu đỏ và ghi số chẵn ;
 - Màu xanh hoặc ghi số lẻ.
- 5.3.** Có 5 bạn nam và 5 bạn nữ xếp ngồi ngẫu nhiên quanh bàn tròn. Tính xác suất sao cho nam, nữ ngồi xen kẽ nhau.
- 5.4.** Kết quả (b, c) của việc gieo con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần, trong đó b là số chấm xuất hiện trong lần gieo đầu, c là số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai, được thay vào phương trình bậc hai

$$x^2 + bx + c = 0.$$

Tính xác suất để

- Phương trình vô nghiệm ;
 - Phương trình có nghiệm kép ;
 - Phương trình có nghiệm.
- 5.5.** Một hộp chứa 10 quả cầu được đánh số từ 1 đến 10, đồng thời các quả từ 1 đến 6 được sơn màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên một quả. Kí hiệu A là biến cố : "Quả lấy ra màu đỏ", B là biến cố : "Quả lấy ra ghi số chẵn". Hỏi A và B có độc lập không ?
- 5.6.** Một con súc sắc cân đối và đồng chất được gieo hai lần. Tính xác suất sao cho
- Tổng số chấm của hai lần gieo là 6.
 - Ít nhất một lần gieo xuất hiện mặt một chấm.
- 5.7.** Trong kì kiểm tra chất lượng ở hai khối lớp, mỗi khối có 25% học sinh trượt Toán, 15% trượt Lí và 10% trượt cả Toán lẫn Lí. Từ mỗi khối chọn ngẫu nhiên một học sinh. Tính xác suất sao cho
- Hai học sinh đó trượt Toán ;
 - Hai học sinh đó đều bị trượt một môn nào đó ;
 - Hai học sinh đó không bị trượt môn nào ;

d) Có ít nhất một trong hai học sinh bị trượt ít nhất một môn.

5.8. Cho A và B là hai biến cố độc lập với $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,3$. Tính

a) $P(A \cup B)$;

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

5.9. Từ một cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 con, lấy ngẫu nhiên lần lượt có hoàn lại từng con cho đến khi lần đầu tiên lấy được con át thì dừng. Tính xác suất sao cho

a) Quá trình lấy dừng lại ở lần thứ hai ;

b) Quá trình lấy dừng lại sau không quá hai lần.