LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. a) $\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \dfrac{14}{3}\pi\right) + \sin\left(\alpha - \dfrac{8}{3}\pi\right) =$

$$= \sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\frac{2\pi}{3} = 0.$$

b) $\dfrac{\sin 4a}{1+\cos 4a}\cdot\dfrac{\cos 2a}{1+\cos 2a} = \dfrac{2\sin 2a\cos^2 2a}{2\cos^2 2a.2\cos^2 a}$

$$= \frac{2\sin a\cos a}{2\cos^2 a} = \tan a = \cot\left(\frac{3\pi}{2} - a\right).$$

c) $(\cos a - \cos b)^2 - (\sin a - \sin b)^2 =$

$$= 4\sin^2\frac{a+b}{2}\sin^2\frac{a-b}{2} - 4\cos^2\frac{a+b}{2}\sin^2\frac{a-b}{2}$$

$$= 4\sin^2\frac{a-b}{2}\left(\sin^2\frac{a+b}{2} - \cos^2\frac{a+b}{2}\right)$$

$$= 4\sin^2\frac{a-b}{2}\left(1 - 2\cos^2\frac{a+b}{2}\right) = -4\sin^2\frac{a-b}{2}\cos(a+b).$$

d) $\sin^2(45^o + \alpha) - \sin^2(30^o - \alpha) - \sin 15^o\cos(15^o + 2\alpha) =$

$= [\sin(45^o + \alpha) + \sin(30^o - \alpha)]\,[\sin(45^o + \alpha) - \sin(30^o - \alpha)] - \sin 15^o\cos(15^o + 2\alpha)$

$= 2\sin\dfrac{75^o}{2}\cos\left(\dfrac{15^o}{2} + \alpha\right).2\cos\dfrac{75^o}{2}\sin\left(\dfrac{15^o}{2} + \alpha\right) - \sin 15^o\cos(15^o + 2\alpha)$

$= \sin 75^o\sin(15^o + 2\alpha) - \cos 75^o\cos(15^o + 2\alpha)$

$= -\cos(90^o + 2\alpha) = \cos(90^o - 2\alpha) = \sin 2\alpha.$

2. a) $1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-3\alpha\right)+\cot\left(\frac{5}{2}\pi+3\alpha\right)$

$$=1-\sin 3\alpha+\cos 3\alpha-\tan 3\alpha$$

$$=\frac{\cos 3\alpha-\sin 3\alpha\cos 3\alpha+\cos^2 3\alpha-\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}$$

$$=\frac{(\cos 3\alpha-\sin 3\alpha)(1+\cos 3\alpha)}{\cos 3\alpha}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-3\alpha\right).2\cos^2\frac{3\alpha}{2}}{\cos 3\alpha}=\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{3\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-3\alpha\right)}{\cos 3\alpha}.$$

b) $\frac{\cos 7\alpha-\cos 8\alpha-\cos 9\alpha+\cos 10\alpha}{\sin 7\alpha-\sin 8\alpha-\sin 9\alpha+\sin 10\alpha}=\frac{2\sin 8\alpha\sin\alpha-2\sin 9\alpha\sin\alpha}{2\cos 8\alpha\sin\alpha+2\cos 9\alpha\sin\alpha}$

$$=\frac{\sin 8\alpha-\sin 9\alpha}{\cos 9\alpha-\cos 8\alpha}=\frac{-2\cos\frac{17\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{-2\sin\frac{17\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}=\cot\frac{17\alpha}{2}.$$

c) $-\cos 5a\cos 4a-\cos 4a\cos 3a+2\cos^2 2a\cos a$

$$=-\cos 4a(\cos 5a+\cos 3a)+2\cos^2 2a\cos a$$

$$=-2\cos 4a\cos 4a\cos a+2\cos^2 2a\cos a$$

$$=2\cos a(\cos^2 2a-\cos^2 4a)$$

$$=2\cos a(\cos 2a+\cos 4a)(\cos 2a-\cos 4a)$$

$$=2\cos a\,.\,2\cos 3a\cos a\,.\,2\sin 3a\sin a$$

$$=2\cos a\sin 2a\sin 6a.$$

3. a) HD : Thay $\sin C=\sin(A+B)$.

b) $\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \quad (1)$$

c) Chứng minh tương tự câu b) ta có

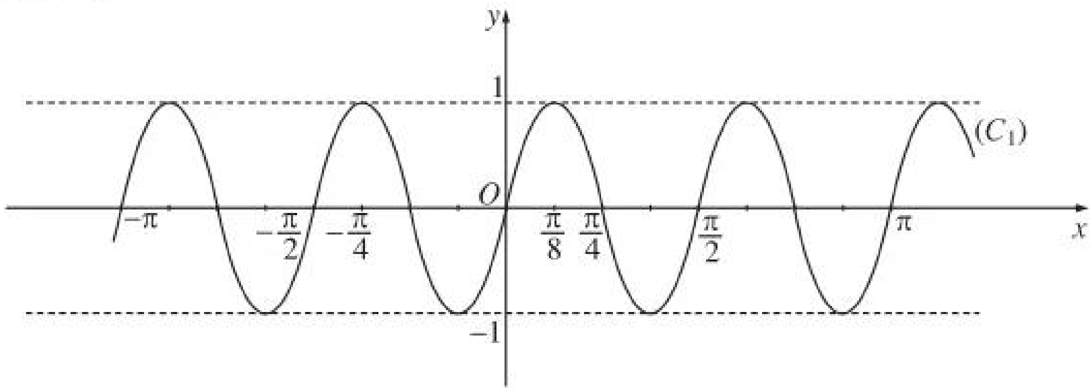
$$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

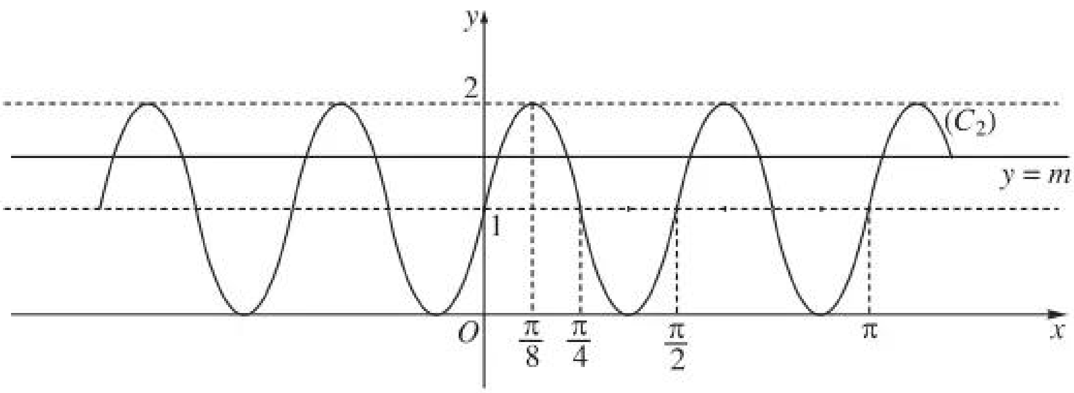
4. a) Ta có $\sin 4(x + k\frac{\pi}{2}) = \sin(4x + 2k\pi) = \sin 4x$ với $k \in \mathbb{Z}$. Từ đó suy ra hàm số $y = \sin 4x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $\frac{\pi}{2}$.

Vì hàm số $y = \sin 4x$ là hàm số lẻ nên đồ thị của nó có tâm đối xứng là gốc toạ độ O.

Các hàm số $y = \sin 4x$ (C_1) và $y = \sin 4x + 1$ (C_2) có đồ thị như trên hình 1 và hình 2.



Hình 1. Đồ thị hàm số $y = \sin 4x$



Hình 2. Đồ thị hàm số $y = \sin 4x + 1$

b) Vì $\sin 4x + 1 = m \Leftrightarrow \sin 4x = m - 1$

và $\quad -1 \le \sin 4x \le 1$

nên $\quad -1 \le m - 1 \le 1$

$\Leftrightarrow \quad 0 \le m \le 2$.

Từ đó, phương trình (1) có nghiệm khi $0 \le m \le 2$ và vô nghiệm khi $m > 2$ hoặc $m < 0$.

c) Phương trình tiếp tuyến của (C_2) có dạng

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Với $x_0 = \frac{\pi}{24}$ ta có $y_0 = \sin\frac{\pi}{6} + 1 = \frac{3}{2}$;

$$y'(x) = 4\cos 4x \Rightarrow y'(x_0) = 4\cos\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là

$$y - \frac{3}{2} = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{24}\right) \Leftrightarrow y = 2\sqrt{3}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \frac{3}{2}.$$

5. Ta có $y = \frac{1 - \cos 2x}{2} + 2\sin 2x - \frac{3}{2}(1 + \cos 2x) + 1$

$$= 2\sin 2x - 2\cos 2x = 2\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Do đó GTLN của hàm số là $2\sqrt{2}$, đạt được khi $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ hay $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, tức là khi $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

GTNN của hàm số là $-2\sqrt{2}$, đạt được khi $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = -1$ hay $2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, tức là khi $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

6. a) Vì tan$x$ xác định với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và cot$x$ xác định với $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) nên tập xác định của hàm số đã cho là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) Vì $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$ và

$$f(-x) = \frac{\tan(-x) + \sin(-x)}{\cot(-x)} = \frac{-\tan x - \sin x}{-\cot x} = f(x)$$

nên hàm số là chẵn trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) Ta có, với $x \neq k\frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\tan x + \sin x}{\cot x} = \tan x(\tan x + \sin x) = \tan^2 x(1 + \cos x) = 2\tan^2 x.\cos^2\frac{x}{2}.$$

d) Ta có $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^2\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^2 = 2(\sqrt{3})^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$.

Do đó điểm $\left(\frac{\pi}{3};\frac{9}{2}\right)$ thuộc (C).

Trong các công thức nghiệm dưới đây (BT 7, 8, 9), k là số nguyên.

7. a) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$; $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$.

b) $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$; $x=\frac{2}{5}\arctan 5+\frac{2k\pi}{5}\cdot$

c) $x=(2k+1)\frac{\pi}{6}$; $x=(4k-1)\frac{\pi}{4}\cdot$

d) $z=(8k+1)\frac{\pi}{4}$; $z=(8k+3)\frac{\pi}{20}\cdot$

8. a) $x=\frac{k\pi}{2}$; $x=\frac{k\pi}{5}$.

b) $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$; $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$.

c) $x=-40^{\circ}+k60^{\circ}$.

d) $x=(4k+1)\frac{\pi}{2}$; $x=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{2}{3}+k\pi$.

e) $t=(4k+1)\frac{\pi}{4}$.

9. a) $t=k360^{\circ}$; $t=(4k+1)90^{\circ}$.

b) $t=k90^{\circ}$; $t=\pm 15^{\circ}+k90^{\circ}$.

c) $x=(3k\pm 1)\frac{\pi}{12}$.

d) $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$.

e) $t=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+k\pi$.

10. • Giả sử chữ số 2 đứng đầu. Khi đó, chữ số 2 kia sẽ được xếp vào một trong bảy chỗ còn lại. Có 7 cách. Khi đã xếp xong hai chữ số 2, còn 6 chỗ, ta xếp 9 chữ số khác 2 vào 6 chỗ đó. Ta có 9^6 cách. Theo quy tắc nhân, có 7.9^6 số gồm 8 chữ số mà chữ số 2 đứng đầu.

• Chữ số 2 không đứng đầu. Khi đó, trong 8 chữ số khác không và khác 2, ta chọn một chữ số để xếp vào vị trí đầu. Có 8 cách.

Chọn hai chỗ trong bảy chỗ để xếp hai chữ số 2. Có C_7^2 cách.

Xếp chín chữ số (khác 2) vào năm vị trí còn lại, có 9^5 cách.

Theo quy tắc nhân, có $8.C_7^2.9^5$ số mà chữ số 2 không đứng đầu.

Theo quy tắc cộng, số các số có 8 chữ số mà có đúng hai chữ số 2 là

$$7.9^6 + 8.C_7^2.9^5 = 13\,640\,319.$$

11. Đầu tiên ta chỉ dùng 7 ghế và xếp An, Chi và 5 bạn không thuộc nhóm An, Chi vào 7 ghế. Ta có 7! cách xếp. Sau đó xếp Bình ngồi cạnh An. Có 2! cách. Cuối cùng xếp Chi, Hương ngồi cùng nhóm với Dung. Ta có 3! cách.

Theo quy tắc nhân, có 7! 2! 3! = 60 480 cách.

12. Không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, ..., 100\}$.

$$A = \{3, 6, 9, ..., 99\},\ n(A) = 33.$$
$$B = \{5, 10, ..., 100\},\ n(B) = 20.$$

a) $$P(A) = \frac{33}{100},\ P(B) = \frac{20}{100}.$$

b) $$A \cap B = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}\ ;$$
$$P(A \cap B) = \frac{6}{100} \neq P(A)\ .\ P(B).$$

Vậy A và B không độc lập.

– Nếu có 105 thẻ thì xét tương tự, ta có :

$$n(A) = 35,\ P(A) = \frac{35}{105} = \frac{1}{3}\ ;$$
$$n(B) = 21,\ P(B) = \frac{21}{105} = \frac{1}{5}\ ;$$
$$n(A \cap B) = 7\ ;$$
$$P(A \cap B) = \frac{7}{105} = \frac{1}{15} = P(A)\ .\ P(B).$$

Vậy A và B độc lập.

13. Kí hiệu A_i là biến cố "Bi lấy từ hộp thứ i màu đỏ", $i = 1, 2$. Biến cố cần tìm xác suất là $A = A_1A_2 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2$.

Do A_1 và A_2 độc lập nên

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1A_2) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2) \\ &= P(A_1)P(A_2) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) \\ &= \frac{1}{3}.\frac{2}{3} + \frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

14. Kí hiệu công sai là d, ta có

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = -12 \\ a_1a_3a_5 = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = -4 \\ a_1(a_1 + 2d)(a_1 + 4d) = 80 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -2d - 4 \\ 16(d + 2)(d - 2) = 80. \end{cases}$$

Giải ra ta được $d = \pm 3$.

Các cấp số cộng phải tìm là

$2, -1, -4, -7, \ldots$

và $-10, -7, -4, -1, \ldots$

15. Ta có $S_1 = u_1 = 4 \,.\, 1^2 - 3.1 = 1$

và $$\frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2} = 4n^2 - 3n$$

$$\Rightarrow [2 + (n-1)d] = 2(4n - 3) \Rightarrow d = 8.$$

Từ đó $u_1 = 1, u_2 = 9, u_3 = 17.$

16. Vì $|x| < 1$ nên với $u_1 = x$, $q = x$ ta có

$$S = \frac{u_1}{1-q} = x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{x}{1-x}.$$

Do đó

$$\frac{1}{x} + x + x^2 + ... + x^n + ... = \frac{1}{x} + S = \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{x}{1-x} = \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x(1-x)} = \frac{7}{2}$$

Giải ra ta được $x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3}$.

17. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1q^3 - a_1q = -\dfrac{45}{32} \\ a_1q^5 - a_1q^3 = -\dfrac{45}{512}. \end{cases}$$

Từ đó rút ra $q^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow q = \pm\frac{1}{4}$.

Với $q = \frac{1}{4}$ thì $a_1 = 6$;

$q = -\frac{1}{4}$ thì $a_1 = -6$.

18. Ta có

$$a_2^2 = \left(\frac{1}{3-\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{6(2-\sqrt{3})} = \frac{1}{6}(2+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{1}{6} = a_1.\ a_3.$$

Vậy 3 số hạng đầu lập thành cấp số nhân với công bội là

$$q = \frac{1}{3-\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1}{3+\sqrt{3}}.$$

Rõ ràng $|q| < 1$, nên tổng vô hạn trên là

$$S = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} : \left(1 - \frac{1}{3+\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad S = 3 + \sqrt{3}.$$

19. a) $$x_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1} \Rightarrow \lim x_n = \frac{1}{2}.$$

b) $$x_n = \sqrt[3]{1+n^3} - n = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+n^3)^2} + n\sqrt[3]{1+n^3} + n^2}$$

$\Rightarrow \quad \lim x_n = 0.$

c) $$x_n = \frac{n^2\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)}{1} = \frac{-n^2}{n+\sqrt{n^2+1}}$$

$$= -n.\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to -\infty \quad \text{khi} \quad n \to +\infty.$$

d) $$x_n = \sqrt[3]{n^2-n^3} + n = \frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^2-n^3)^2} - n\sqrt[3]{n^2-n^3} + n^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}-1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{n}-1} + 1} \to \frac{1}{3} \quad \text{khi} \quad n \to +\infty.$$

20. a) $$x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n} = \frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)}{n\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1} \Rightarrow \lim x_n = +\infty.$$

b) $$x_n = n\left(1-\frac{1}{n^2}\right).\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2n}-2\right) = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{1}{2n}-2\right)$$

$\Rightarrow \lim x_n = 1.(-2) = -2.$

21. a) Dãy (x_n) bị chặn vì

$$0 < \frac{5n^2}{n^2+3} < 5 \text{ với mọi } n\ ;$$

b) Dãy (y_n) bị chặn vì

$$|y_n| = \left|(-1)^n\right|.\frac{2n}{n+1}.|\sin n| < \frac{2n}{n+1} < 2\ ;$$

c) Dãy (z_n) không bị chặn vì

$$|z_n| = |n\cos n\pi| = n.$$

22. Dãy số $\{x_n\}$ tăng vì $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{5^{n+1}+1} > x_n$.

Mặt khác, dãy số này bị chặn trên vì

$$x_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + ... + \frac{1}{5^n+1} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + ... + \frac{1}{5^n} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5^{n+1}}}{1 - \frac{1}{5}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) < \frac{1}{4} \text{ với mọi } n.$$

23. a) 4.

b) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3} = \frac{15}{11}.$$

c) $$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{6x^2+3}-3x\right)}{3-3x^2}$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{3(1-x)} = 1.$$

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x+4x^2}{x\left(\sqrt{9+5x+4x^2}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{5+4x}{\sqrt{9+5x+4x^2}+3} = \frac{5}{6}.$$

e) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(10-x)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4\right)}$$

$$= -\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt[3]{(10-x)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4} = -\frac{1}{12}.$$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7(1-x)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}\right)}{8(1-x)\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}\right)}$

$$=\frac{7}{8}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}}{\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}}=\frac{7}{12}.$$

24. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\dfrac{4}{x}}{9+\dfrac{6}{x}-\dfrac{12}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}}=\frac{2}{9}.$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=0.$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-5x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{2x^2-3}+(-5x)\right]=+\infty.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}}{x\left(4+\dfrac{2}{x}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}}{x\left(4+\dfrac{2}{x}\right)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

25. a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}=\cos a.$

b) Đặt $1-x=t$ ($t\to 0$ khi $x\to 1$), ta có

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{t\to 0}t\tan(1-t)\frac{\pi}{2}$$

$$=\lim_{t\to 0}t\cot\frac{\pi}{2}t=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\pi}{2}t.\dfrac{2}{\pi}}{\tan\dfrac{\pi}{2}t}=\frac{2}{\pi}.$$

➢ **Chú ý.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{1}{\cos x} = 1.$

c) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{5-3\sqrt{3}}.$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}\cos x} = \dfrac{1}{2}.$

26. a) $y' = \dfrac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}.$

b) $y' = \dfrac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$ $(x \neq 1).$

c) $y' = -2\cos x(1+\sin x).$

d) $y' = -\dfrac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}.$

e) $y' = -\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{2x}{3}\tan\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos^2\dfrac{x}{3}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}.$

f) $y' = \dfrac{\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)}}.$

g) $y' = -\dfrac{1}{(x+1)^2}.\sin\dfrac{x}{x+1}.$

h) $y' = \dfrac{2x\sin 3x - 3(x^2-1)\cos 3x}{\sin^2 3x}.$

i) $y' = 3\sin 2x\cos x - 3\sin^3 x - \sin 2x = \sin 2x(3\cos x - 1) - 3\sin^3 x.$

k) $y' = \dfrac{-2\cot 3x}{\sqrt{7-4x}} - \dfrac{3\sqrt{7-4x}}{\sin^2 3x}.$

27. $A = 0$. Khi đó $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$.

28. a) $y' = -4x^3 - 2x$, $y'' = -12x^2 - 2.$

b) $y'''(x) = -24x$, $y'''(-1) = 24$, $y'''(2) = -48.$

c) Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(x_0; y_0)$ có dạng: $y - y_0 = y'(x_0).(x - x_0).$

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{6}x-1$ nên $y'(x_0)=-6$. Ta có

$$-4x_0^3-2x_0=-6 \Leftrightarrow 2x_0^3+x_0-3=0 \Leftrightarrow (x_0-1)(2x_0^2+2x_0+3)=0$$
$$\Rightarrow x_0=1, y_0=4.$$

Phương trình tiếp tuyến phải tìm là $y-4=-6(x-1) \Leftrightarrow y=-6x+10.$