Bài tập ôn chương I

1. a) Điều kiện : $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\neq 0$ và $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\neq -1$

$\Leftrightarrow\ x-\dfrac{\pi}{3}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ và $x-\dfrac{\pi}{3}\neq-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow\ x\neq\dfrac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ và $x\neq\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D=\mathbb{R}\setminus\left[\left\{\frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right].$$

b) Điều kiện : $\cos x\neq 0$; $\sin x\neq 0$ và $\sin 2x\neq 1$

$\Leftrightarrow\ x\neq k\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ và $x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D=\mathbb{R}\setminus\left[\left\{k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right].$$

2. a) $y = \sin^3 x - \tan x$ là hàm số lẻ.

b) $y = \dfrac{\cos x + \cot^2 x}{\sin x}$ là hàm số lẻ.

3. a) Hàm số $y = \sin x$ giảm trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ và tăng trên đoạn $\left[\dfrac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$.

b) $y = \sin x$ giảm trên $\left[-\pi ; -\dfrac{\pi}{2}\right]$, tăng trên $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; 0\right]$.

c) $y = \sin x$ tăng trên $\left[-2\pi ; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$, giảm trên $\left[-\dfrac{3\pi}{2} ; -\pi\right]$.

4. HD : a) $-1 \leq 3 - 4\sin x \leq 7$.

b) $1 \leq 2 - \sqrt{\cos x} \leq 2$.

5. a) Đồ thị của hàm số $y = \sin 2x + 1$ thu được từ đồ thị hàm số $y = \sin 2x$ bằng cách tịnh tiến song song với trục tung lên phía trên một đơn vị.

b) Đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ thu được từ đồ thị hàm số $y = \cos x$ bằng cách tịnh tiến song song với trục hoành sang phải một đoạn bằng $\dfrac{\pi}{6}$.

6. $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 4x \Leftrightarrow -\cos 2x = \cos 4x \Leftrightarrow 2\cos 3x \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

7. $\cos 3x - \cos 5x = \sin x \Leftrightarrow \sin x(1 - 2\sin 4x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin 4x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{\pi}{24} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{5\pi}{24} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

8. $3\sin^2 x + 4\cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow -3\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

$\Leftrightarrow x = \pm\arccos\left(\dfrac{2 - \sqrt{7}}{3}\right) + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (giá trị $\dfrac{2 + \sqrt{7}}{3} > 1$ nên bị loại).

9. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x \quad \Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2x}{2} + \dfrac{1-\cos 4x}{2} = \dfrac{1-\cos 6x}{2}$

$\Leftrightarrow 1 - \cos 4x + \cos 6x - \cos 2x = 0 \quad \Leftrightarrow 2\sin^2 2x - 2\sin 4x \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x(\sin 2x - \sin 4x) = 0 \quad \Leftrightarrow 4\sin 2x \cos 3x \sin x = 0.$

Đáp số : $x = k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

10. $2\tan x + 3\cot x = 4$. Điều kiện : $\cos x \neq 0$ và $\sin x \neq 0$. Ta có

$2\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$. Phương trình vô nghiệm đối với $\tan x$, do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

11. $2\cos^2 x - 3\sin 2x + \sin^2 x = 1$.

- $\cos x = 0$ thoả mãn phương trình $\Rightarrow$ phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế cho $\cos^2 x$, tìm được $\tan x = \dfrac{1}{6}$.

Vậy phương trình có các nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \arctan\dfrac{1}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

12. HD : $2\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 3 \Rightarrow \tan^2 x - \tan x + 4 = 0$.
Phương trình vô nghiệm.

13. $3\sin x - 4\cos x = 1 \quad \Leftrightarrow \dfrac{3}{5}\sin x - \dfrac{4}{5}\cos x = \dfrac{1}{5}$

$\Leftrightarrow \sin(x - \alpha) = \dfrac{1}{5}$ (với $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + \arcsin\dfrac{1}{5} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \alpha + \pi - \arcsin\dfrac{1}{5} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

14. $4\sin 3x + \sin 5x - 2\sin x \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin 3x + \sin 5x - \sin 3x + \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow 3\sin 3x + \sin 5x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 3\sin 3x + 2\sin 3x \cos 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \sin 3x(3 + 2\cos 2x) = 0$.

Đáp số : $x = k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

15. $2\tan^2 x - 3\tan x + 2\cot^2 x + 3\cot x - 3 = 0$. (1)

Điều kiện : $\cos x \neq 0$ và $\sin x \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow 2(\tan^2 x + \cot^2 x) - 3(\tan x - \cot x) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\tan x - \cot x)^2 - 3(\tan x - \cot x) + 1 = 0.$$

Đặt $t = \tan x - \cot x$ ta được phương trình

$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1,\ t = \frac{1}{2}$.

Với $t = 1$ ta có $\tan x - \cot x = 1$

$\Leftrightarrow \tan^2 x - \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \arctan\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Với $t = \frac{1}{2}$ ta có $\tan x - \cot x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\tan^2 x - \tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \arctan\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện nên chúng là nghiệm của phương trình đã cho.

16. *Cách 1*. Điều kiện của phương trình : $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$, $\tan x \neq -1$.

Biến đổi phương trình đã cho, ta được

$$\frac{\cos x}{\sin x} - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} + \sin^2 x - \sin x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x.\cos 2x}{\cos x + \sin x} + \sin^2 x - \sin x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} - \frac{\cos x.\cos 2x}{\cos x + \sin x} = \sin x(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - \sin x.\cos x.\cos 2x}{\sin x(\cos x + \sin x)} = \sin x(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(1 - \sin x.\cos x) = \sin^2 x\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(1 - \sin x.\cos x) + \sin^2 x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left(1 - \sin x.\cos x + \sin^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(2 - \sin 2x + 1 - \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left[3 - (\sin 2x + \cos 2x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos 2x = 0 & (1) \\ \sin 2x + \cos 2x = 3 & (2) \end{array}\right.$$

Phương trình (2) vô nghiệm vì $|\sin 2x + \cos 2x| \leq \sqrt{2}$.

Phương trình (1) có nghiệm

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Giá trị $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k = 2n + 1$, với $n \in \mathbb{Z}$ bị loại do điều kiện $\tan x \neq -1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Cách 2.

Đặt $t = \tan x$, điều kiện $t \neq 0$, $t \neq -1$.

Ta có

$$\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}\ ;\ \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ;$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x = 1 + \frac{1}{\tan^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.\frac{1}{1+t} + \frac{t^2}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} \Leftrightarrow \frac{1-t}{t} = \frac{1-t}{1+t^2} + \frac{t^2-t}{1+t^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-t}{t} = \frac{t^2-2t+1}{1+t^2} \Leftrightarrow \frac{(1-t)^2}{1+t^2} - \frac{1-t}{t} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-t)\left[\frac{t(1-t) - \left(1+t^2\right)}{t\left(1+t^2\right)}\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{(1-t)\left(-2t^2+t-1\right)}{t\left(1+t^2\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1 & (1) \\ -2t^2 + t - 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Phương trình (2) vô nghiệm.

Phương trình (1) có nghiệm $t = 1 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.