Bài tập ôn chương III

1. a) HD : Xem ví dụ 1, §1.

b) HD : Đặt $A_n = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$, dễ thấy $A_1 \vdots 9$.

Giả sử đã có $A_k \vdots 9$ với $k \geq 1$. Ta phải chứng minh $A_{k+1} \vdots 9$.

Tính $A_{k+1} = A_k + 9k^2 + 27k + 27$.

c) Làm tương tự như 1.a).

2. a) HD : Kiểm tra với $n = 1$, sau đó biểu diễn

$$A_{k+1} = A_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

b) HD : Kiểm tra với $n = 1$.

Giả sử đã có $B_k = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{2}$.

Ta cần chứng minh

$B_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{2}$ bằng cách tính $B_{k+1} = B_k + \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

c) HD: Kiểm tra với $n = 1$.

Giả sử đã có $S_k = \dfrac{\sin\dfrac{kx}{2}.\sin\dfrac{(k+1)}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$.

Viết $S_{k+1} = S_k + \sin(k+1)x$, sử dụng giả thiết quy nạp và biến đổi ta có

$$S_{k+1} = \frac{\sin\dfrac{(k+1)x}{2}.\sin\dfrac{(k+2)}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}} \text{ (đpcm).}$$

3. a) Với $n = 4$ thì $3^{4-1} = 27 > 4(4+2) = 24$.

Giả sử đã có

$$3^{k-1} > k(k+2) \text{ với } k \geq 4. \qquad (1)$$

Nhân hai vế của (1) với 3, ta có

$$3.3^{k-1} = 3^{(k+1)-1} > 3k(k+2)$$
$$= (k+1)[(k+1)+2] + 2k^2 + 2k - 3.$$

Do $\quad 2k^2 + 2k - 3 > 0\;$ nên $\;3^{(k+1)-1} > (k+1)[(k+1)+2]$,
chứng tỏ bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

b) Giải tương tự câu a).

4. a) Năm số hạng đầu là 1, 2, 4, 7, 11.

b) Từ công thức xác định dãy số ta có

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 1 \text{ hay } u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1} + 1. \quad (1)$$

Vì $v_n = u_{n+1} - u_n$ nên từ (1), ta có

$$v_n = v_{n-1} + 1 \text{ với } n \geq 2. \quad (2)$$

Vậy (v_n) là cấp số cộng với $v_1 = u_2 - u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

c) Để tính u_n, ta viết

$$v_1 = 1$$
$$v_2 = u_3 - u_2$$
$$v_3 = u_4 - u_3$$
$$\ldots$$
$$v_{n-2} = u_{n-1} - u_{n-2}$$
$$v_{n-1} = u_n - n_{n-1}$$

Cộng từng vế $n - 1$ hệ thức trên và rút gọn, ta được

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1} = 1 - u_2 + u_n = 1 - 2 + u_n = u_n - 1,$$

suy ra $u_n = 1 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1} = 1 + \dfrac{n(n-1)}{2}$.

5. a) Năm số hạng đầu là $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{4}{81}, \dfrac{5}{243}$.

b) Lập tỉ số $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1}}{n+1} \cdot \dfrac{n}{u_n} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \cdot \dfrac{n}{n+1}$. $\quad (1)$

Theo công thức định nghĩa ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{3n}$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{3}$ hay $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$.

Vậy, dãy số (v_n) là cấp số nhân, có $v_1 = \dfrac{1}{3}$, $q = \dfrac{1}{3}$.

c) Để tính u_n, ta viết tích của $n-1$ tỉ số bằng $\frac{1}{3}$

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} \cdot \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}} \cdots \frac{v_3}{v_2} \cdot \frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

hay $\quad \frac{v_n}{v_1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, suy ra $v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^n}$.

Vậy $\quad u_n = \frac{n}{3^n}$.

6. HD : Gọi số hạng thứ hai của cấp số cộng là u_2, ta có

$$u_9 = u_2 + 7d,\ u_{44} = u_2 + 42d.$$

Sử dụng tính chất của cấp số nhân $u_2 \,.\, u_{44} = u_9^2$ và tổng các số là 217, ta có một hệ phương trình để tìm u_2 và d.

ĐS : $n = 20$.

7. ĐS : Cấp số cộng 5, 25, 45.

Cấp số nhân 5, 15, 45.

8. HD : Gọi 3 số đó là $a - d$, a, $a + d$ rồi áp dụng tính chất của cấp số cộng và cấp số nhân.

9. Gọi số hạng thứ nhất của cấp số nhân là u_1 và công bội là q.

Ta có $\quad S_l = u_1 + u_1q^2 + u_1q^4 + \ldots \quad (1)$

$S_c = u_1q + u_1q^3 + u_1q^5 + \ldots \quad (2)$

Nhân hai vế của (1) với q ta có

$$qS_l = u_1q + u_1q^3 + u_1q^5 + \ldots = S_c$$

Vậy $\quad q = \frac{S_c}{S_l}$.

10. Gọi số đo ba cạnh của tam giác vuông là $x - d$, x, $x + d$.

Theo giả thiết ta có $(x + d)^2 = (x - d)^2 + x^2$. $\quad (1)$

Từ (1) tìm được $x = 0$, $x = 4d$.

Như vậy có thể có tam giác vuông thoả mãn đầu bài, các cạnh của nó là $3d$, $4d$, $5d$. Đặc biệt, nếu $d = 1$ thì tam giác vuông có các cạnh là 3, 4, 5 (tam giác Ai Cập).

11. a) HD : Đặt tổng là S_n và tính $2S_n$.

ĐS : $S_n = 3 - \dfrac{2n+3}{2^n}$.

b) HD : $n^2 - (n+1)^2 = -2n - 1$. Ta có $1^2 - 2^2 = -3$; $3^2 - 4^2 = -7$; ...

Ta có $u_1 = -3$, $d = -4$ và tính S_n trong từng trường hợp n chẵn, lẻ.

12. a) HD : Với $a = 1$, ta có $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Giả sử $a \neq 1$. Nhân hai vế của hệ thức $S_n = 1 + 2a + 3a^2 + ... + na^{n-1}$ với a và tính hiệu

$$S_n - aS_n = (1-a)S_n.$$

Từ đó, ta tính được $S_n = \dfrac{na^{n+1} - (n+1)a^n + 1}{(a-1)^2}$.

b) Làm tương tự như câu a).

13. Đặt $x^4 = y$, ta có phương trình

$$y^2 - (3m+5)y + (m+1)^2 = 0. \qquad (1)$$

Để phương trình có 4 nghiệm thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm dương y_1, y_2 ($y_1 < y_2$). Bốn nghiệm đó là $-\sqrt{y_2}$, $-\sqrt{y_1}$, $\sqrt{y_1}$, $\sqrt{y_2}$.

Điều kiện để 4 nghiệm trên lập thành cấp số cộng là $\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1} = 2\sqrt{y_1}$ hay $y_2 = 9y_1$, kết hợp với định lí Vi-ét tìm được $m = 5$ và $m = -\dfrac{25}{19}$.

Đáp án Bài tập trắc nghiệm

14. (C) ; **15.** (D) ; **16.** (B) ; **17.** (C) ;

18. (C) ; **19.** (C) ; **20.** (D).