

Bài tập ôn chương III

Giải các bài tập 1, 2, 3 bằng phương pháp quy nạp.

1. Chứng minh rằng

- $n^5 - n$ chia hết cho 5 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;
- Tổng các lập phương của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 9 ;
- $n^3 - n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Chứng minh các đẳng thức sau với $n \in \mathbb{N}^*$

- $$A_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} ;$$
- $$B_n = 1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} ;$$
- $$S_n = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} .$$

3. Chứng minh các bất đẳng thức

- $3^{n-1} > n(n+2)$ với $n \geq 4$;

b) $2^{n-3} > 3n - 1$ với $n \geq 8$.

4. Cho dãy số (u_n) :

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 1 \text{ với } n \geq 2. \end{cases}$$

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số ;

b) Lập dãy số (v_n) với $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Chứng minh dãy số (v_n) là cấp số cộng ;

c) Tìm công thức tính u_n theo n .

5. Cho dãy số (u_n) :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n}{3n} \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Lập dãy số (v_n) với $v_n = \frac{u_n}{n}$.

Chứng minh dãy số (v_n) là cấp số nhân.

c) Tìm công thức tính u_n theo n .

6. Ba số có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, hoặc là các số hạng thứ 2, thứ 9 và thứ 44 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng để tổng của chúng là 820 ?

7. Một cấp số cộng và một cấp số nhân có số hạng thứ nhất bằng 5, số hạng thứ hai của cấp số cộng lớn hơn số hạng thứ hai của cấp số nhân là 10, còn các số hạng thứ ba bằng nhau. Tìm các cấp số ấy.

8. Chứng minh rằng nếu ba số lập thành một cấp số nhân, đồng thời lập thành cấp số cộng thì ba số ấy bằng nhau.

9. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội là q và số các số hạng là chẵn. Gọi S_c là tổng các số hạng có chỉ số chẵn và S_l là tổng các số hạng có chỉ số lẻ.

Chứng minh rằng $q = \frac{S_c}{S_l}$.

10. Có thể có một tam giác vuông mà số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng không ?

11. Tính tổng :

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$;

b) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2$.

12. Tính tổng :

a) $S_n = 1 + 2a + 3a^2 + \dots + na^{n-1}$;

b) $S_n = 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + \dots + nx^n$.

13. Tìm m để phương trình $x^4 - (3m + 5)x^2 + (m + 1)^2 = 0$ có bốn nghiệm lập thành cấp số cộng.

Bài tập trắc nghiệm (14 - 20)

14. Trong các dãy số (u_n) sau đây, hãy chọn dãy số giảm :

(A) $u_n = \sin n$;

(B) $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$;

(C) $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$;

(D) $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$.

15. Trong các dãy số (u_n) sau đây, hãy chọn dãy số bị chặn :

(A) $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$;

(B) $u_n = n + \frac{1}{n}$;

(C) $u_n = 2^n + 1$;

(D) $u_n = \frac{n}{n+1}$.

16. Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 3$, $u_2 = -6$. Hãy chọn kết quả đúng :

(A) $u_5 = -24$; (B) $u_5 = 48$; (C) $u_5 = -48$; (D) $u_5 = 24$.

17. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là cấp số cộng ?

(A) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^3 - 1 \end{cases}$;

(B) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} - u_n = 2 \end{cases}$;

(D) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$.

18. Cho cấp số cộng

$6, x, -2, y$.

Kết quả nào sau đây là đúng ?

(A) $x = 2, y = 5$;

(C) $x = 2, y = -6$;

(B) $x = 4, y = 6$;

(D) $x = 4, y = -6$.

19. Cho cấp số nhân

$$-2, x, -18, y.$$

Hãy chọn kết quả đúng :

(A) $x = 6, y = -54$;

(C) $x = -6, y = -54$;

(B) $x = -10, y = -26$;

(D) $x = -6, y = 54$.

20. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3^n$. Hãy chọn hệ thức đúng :

(A) $\frac{u_1 + u_9}{2} = u_5$;

(C) $1 + u_1 + u_2 + \dots + u_{100} = \frac{u_{100} - 1}{2}$;

(B) $\frac{u_2 u_4}{2} = u_3$;

(D) $u_1 u_2 \dots u_{100} = u_{5050}$.