Bài tập ôn chương IV

1. a) -2 ; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2}$.

2. a) Ta có, $|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1}$. Đặt $v_n = \frac{1}{n^2+1}$. (1)

Ta có $\lim v_n = \lim \frac{1}{n^2+1} = \lim \frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$. Do đó, $|v_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Từ (1) suy ra, $|u_n| = v_n = |v_n|$.

Vậy, $|u_n|$ cũng có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, nghĩa là $\lim u_n = 0$.

b) Hướng dẫn : $|u_n| = \left|\frac{2^n - n}{3^n+1}\right| < \frac{2^n}{3^n+1}$.

3. $2{,}131131131\ldots = 2 + \frac{131}{1000} + \frac{131}{1000^2} + \ldots + \frac{131}{1000^n} + \ldots$

$$= 2 + \frac{\frac{131}{1000}}{1-\frac{1}{1000}} = 2 + \frac{131}{999} = \frac{2129}{999}.$$

(Vì $\frac{131}{1000}, \frac{131}{1000^2}, ..., \frac{131}{1000^n}, ...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{1000}$).

4. a) Chứng minh bằng quy nạp : $u_n > 0$ với mọi n. (1)

– Với $n = 1$, ta có $u_1 = 1 > 0$.

– Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là $u_k > 0$, ta cần chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$.

Ta có $u_{k+1} = \frac{2u_k + 3}{u_k + 2}$. Vì $u_k > 0$ nên $u_{k+1} = \frac{2u_k + 3}{u_k + 2} > 0$.

– *Kết luận :* $u_n > 0$ với mọi n.

b) Đặt $\lim u_n = a$.

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \Rightarrow \lim u_{n+1} = \lim \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \Rightarrow a = \frac{2a + 3}{a + 2} \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}.$$

Vì $u_n > 0$ với mọi n, nên $\lim u_n = a \geq 0$. Từ đó suy ra $\lim u_n = \sqrt{3}$.

5. Xét dãy số (v_n) với $v_n = M - u_n$.

$u_n < M$ với mọi $n \Rightarrow v_n > 0$ với mọi n. (1)

Mặt khác, $\lim v_n = \lim(M - u_n) = M - a$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $M - a \geq 0$ hay $a \leq M$.

6. Mỗi khi chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao của lần rơi ngay trước đó và sau đó lại rơi xuống từ độ cao thứ hai này. Do đó, độ dài hành trình của quả bóng kể từ thời điểm rơi ban đầu đến

– thời điểm chạm đất lần thứ nhất là $d_1 = 63$;

– thời điểm chạm đất lần thứ hai là $d_2 = 63 + 2.\frac{63}{10}$;

– thời điểm chạm đất lần thứ ba là $d_3 = 63 + 2.\frac{63}{10} + 2.\frac{63}{10^2}$;

– thời điểm chạm đất lần thứ tư là $d_4 = 63 + 2.\frac{63}{10} + 2.\frac{63}{10^2} + 2.\frac{63}{10^3}$;

...

– thời điểm chạm đất lần thứ n ($n > 1$) là

$$d_n = 63 + 2.\frac{63}{10} + 2.\frac{63}{10^2} + ... + 2.\frac{63}{10^{n-1}}.$$

(Có thể chứng minh khẳng định này bằng quy nạp).

Do đó, độ dài hành trình của quả bóng kể từ thời điểm rơi ban đầu đến khi nằm yên trên mặt đất là :

$$d = 63 + 2.\frac{63}{10} + 2.\frac{63}{10^2} + ... + 2.\frac{63}{10^{n-1}} + ... \text{ (mét).}$$

Vì $2.\frac{63}{10}, 2.\frac{63}{10^2}, ..., 2.\frac{63}{10^{n-1}}, ...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn, công bội $q = \frac{1}{10}$,

nên ta có $2.\frac{63}{10} + 2.\frac{63}{10^2} + ... + 2.\frac{63}{10^{n-1}} + ... = \dfrac{2.\frac{63}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 14.$

Vậy, $d = 63 + 2.\frac{63}{10} + 2.\frac{63}{10^2} + ... + 2.\frac{63}{10^{n-1}} + ... = 63 + 14 = 77$ (mét).

7. *Hướng dẫn :* Chọn hai dãy số có số hạng tổng quát là $a_n = \frac{1}{2n\pi}$ và $b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$. Tính và so sánh $\lim f(a_n)$ và $\lim f(b_n)$ để kết luận về giới hạn của $f(x)$ khi $x \to 0$.

8. a) -3 ; b) 6 ; c) $+\infty$; d) $-\infty$.

9. a) 4 ; b) 1 ; c) 2 ; d) $\frac{1}{2}$;

e) $$\lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

f) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1-(x+2)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x-1}{x^2-4}=-\infty.$

10. Chẳng hạn $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{(x-1)^2}$. Dễ dàng kiểm tra được rằng $f(x)$ thoả mãn các điều kiện đã nêu.

11. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

12. *Hướng dẫn :* Chẳng hạn xét $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{nếu } x\geq 0\\ x-1, & \text{nếu } x<0.\end{cases}$

13. *Hướng dẫn :*

a) Xét hàm số $f(x)=x^5-5x-1$ trên các đoạn $[-2 ; -1]$, $[-1 ; 0]$ và $[0 ; 3]$.

b) Xét hàm số $f(x)=m(x-1)^3(x^2-4)+x^4-3$ trên các đoạn $[-2 ; 1]$, $[1 ; 2]$.

c) Xét hàm số $f(x)=x^3-3x-m$ trên các đoạn $[-1 ; 1]$, $[1 ; 2]$.

14. a) Với $x\neq 2$ ta có $\dfrac{x^3+8x+1}{x-2}=0 \Leftrightarrow x^3+8x+1=0.$

Vì $x^3+8x+1>0$ với mọi $x\in(1 ; 3)$ nên phương trình $x^3+8x+1=0$ không có nghiệm trong khoảng $(1 ; 3)$. Do đó, phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng này.

b) $f(x)$ là hàm phân thức hữu tỉ, nên liên tục trên $(-\infty ; 2)$. Do đó, nó liên tục trên $[-3 ; 1]$.

Mặt khác, $f(-3)f(1)=-100<0$.

Do đó, phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(-3 ; 1)$.

15. Xét hàm số $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{2})$.

Ta có $g(0)=f(0)-f(0+\frac{1}{2})=f(0)-f(\frac{1}{2}),$

$$g(\tfrac{1}{2})=f(\tfrac{1}{2})-f(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})=f(\tfrac{1}{2})-f(1)=f(\tfrac{1}{2})-f(0)$$

(vì theo giả thiết $f(0)=f(1)$).

Do đó, $g(0)\, g(\frac{1}{2}) = [f(0) - f(\frac{1}{2})]\, [f(\frac{1}{2}) - f(0)] = -\, [f(0) - f(\frac{1}{2})]^2 \leq 0.$

– Nếu $g(0)\, g(\frac{1}{2}) = 0$ thì $x = 0$ hay $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

– Nếu $g(0)\, g(\frac{1}{2}) < 0$. (1)

Vì $y = f(x)$ và $y = f(x + \frac{1}{2})$ đều liên tục trên đoạn $[0 ; 1]$, nên hàm số $y = g(x)$ cũng liên tục trên $[0 ; 1]$ và do đó nó liên tục trên $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0 ; \frac{1}{2})$.

Kết luận : Phương trình $g(x) = 0$ hay $f(x) - f(x + \frac{1}{2}) = 0$ luôn có nghiệm trong đoạn $[0 ; \frac{1}{2}]$.

Đáp án Bài tập trắc nghiệm

16. (C).	**17.** (B).	**18.** (C).	**19.** (D).	**20.** (A).
21. (D).	**22.** (B).	**23.** (B).	**24.** (D).	**25.** (D).