

Bài tập ôn chương IV

1. Tính các giới hạn sau ($n \rightarrow +\infty$):

a) $\lim \frac{(-3)^n + 2.5^n}{1 - 5^n}$;

b) $\lim \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2 + n + 1}$;

c) $\lim \left(\sqrt{n^2 + 2n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1} \right)$.

2. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

a) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$;

b) $u_n = \frac{2^n - n}{3^n + 1}$.

3. Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn 2,131131131... (chu kì 131) dưới dạng phân số.

4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \end{cases} \text{ với } n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng $u_n > 0$ với mọi n .

b) Biết (u_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

5. Cho dãy số (u_n) thoả mãn $u_n < M$ với mọi n . Chứng minh rằng nếu $\lim u_n = a$ thì $a \leq M$.

6. Từ độ cao 63m của tháp nghiêng PISA ở Italia (H.5) người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được ngay trước đó.



Hình 5

Tính độ dài hành trình của quả bóng từ thời điểm ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất.

7. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ không có giới hạn khi $x \rightarrow 0$.

8. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+5}{x^2+x-3}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{x^2+8x+3}$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2x^2\sqrt{x} - 1)$;

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 5x - 4}{(x+1)^2}$.

9. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{4-\sqrt{x^2+16}}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4+5x-1}{1-x^2+x^4}$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2-x+1}}{1-2x}$;

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right)$.

10. Xác định một hàm số $y = f(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau :

a) $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$,

b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$.

11. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^3 + 1}, & \text{nếu } x \neq -1 \\ 1, & \text{nếu } x = -1 \end{cases}$

trên tập xác định của nó.

12. Xác định một hàm số $y = f(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau :

a) $f(x)$ xác định trên \mathbb{R} ,

b) $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty ; 0)$ và trên $[0 ; +\infty)$, nhưng gián đoạn tại $x = 0$.

13. Chứng minh rằng phương trình :

a) $x^5 - 5x - 1 = 0$ có ít nhất ba nghiệm ;

b) $m(x - 1)^3(x^2 - 4) + x^4 - 3 = 0$ luôn có ít nhất hai nghiệm với mọi giá trị của tham số m ;

c) $x^3 - 3x = m$ có ít nhất hai nghiệm với mọi giá trị của $m \in (-2 ; 2)$.

14. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3 + 8x + 1}{x - 2}$. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm hay không

a) trong khoảng $(1 ; 3)$?

b) trong khoảng $(-3 ; 1)$?

15. Giả sử hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f(x + \frac{1}{2})$ đều liên tục trên đoạn $[0 ; 1]$ và

$f(0) = f(1)$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) - f(x + \frac{1}{2}) = 0$ luôn có nghiệm trong đoạn $[0 ; \frac{1}{2}]$.

Bài tập trắc nghiệm

16. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

(A) Nếu $\lim |u_n| = +\infty$, thì $\lim u_n = +\infty$;

(B) Nếu $\lim|u_n| = +\infty$, thì $\lim u_n = -\infty$;

(C) Nếu $\lim u_n = 0$ thì $\lim|u_n| = 0$;

(D) Nếu $\lim u_n = -a$ thì $\lim|u_n| = a$.

17. $\lim \frac{2^n - 3^n}{2^n + 1}$ bằng

(A) 1 ; (B) $-\infty$; (C) 0 ; (D) $+\infty$.

18. $\lim \left(\sqrt{n^2 - n + 1} - n \right)$ bằng

(A) 0 ; (B) 1 ; (C) $-\frac{1}{2}$; (D) $-\infty$.

19. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^3 + 1)$ bằng

(A) ; 1 (B) $-\infty$; (C) 0 ; (D) $+\infty$.

20. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x-2}$ bằng

(A) $-\infty$; (B) $\frac{1}{4}$; (C) 1 ; (D) $+\infty$.

21. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{3+3x}$. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ bằng

(A) $+\infty$; (B) $\frac{2}{3}$; (C) 1 ; (D) $-\infty$.

22. $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 - 6}{9 + 3x}$ bằng

(A) $\frac{1}{3}$; (B) $-\infty$; (C) $\frac{1}{6}$; (D) $+\infty$.

23. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - x + 1}}{x + 1}$ bằng

- (A) 2 ; (B) -2 ; (C) 1 ; (D) -1.

24. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a ; b]$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

- (A) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a)f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(a ; b)$.
- (B) Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a ; b)$.
- (C) Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a ; b)$, thì hàm số $f(x)$ phải liên tục trên khoảng $(a ; b)$.
- (D) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, tăng trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a)f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a ; b)$.

25. Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$. (1)

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

- (A) Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-1 ; 1)$;
- (B) Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-2 ; 0)$;
- (C) Phương trình (1) chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2 ; 1)$;
- (D) Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0 ; 2)$.