Bài tập ôn chương V

1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = x\cot^2 x$;

b) $y = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\cos 3x}$;

c) $y = (\sin 2x + 8)^3$;

d) $y = (2x^3 - 5)\tan x$.

2. Giải phương trình $f'(x) = g(x)$, biết rằng

a) $f(x) = \dfrac{1-\cos 3x}{3}$; $g(x) = (\cos 6x - 1)\cot 3x$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos 2x$; $g(x) = 1 - (\cos 3x + \sin 3x)^2$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x + 5\cos x$; $g(x) = 3\sin^2 x + \dfrac{3}{1+\tan^2 x}$.

3. Tìm đạo hàm của hàm số tại điểm đã chỉ ra :

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$, $\qquad f'(0) = ?$

b) $y = (4x+5)^2$, $\qquad y'(0) = ?$

c) $g(x) = \sin 4x \cos 4x$, $\qquad g'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = ?$

4. Chứng minh rằng $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, nếu

a) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^9 - x^6 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$;

b) $f(x) = 2x + \sin x$.

5. Xác định a để $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, biết rằng

$$f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + 2x + 1.$$

6. Xác định a để $g'(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, biết rằng

$$g(x) = \sin x - a\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + 2ax.$$

7. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \tan x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

8. Trên đường cong $y = 4x^2 - 6x + 3$, hãy tìm điểm tại đó tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 2x$.

9. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$ cắt trục hoành tại gốc toạ độ dưới một góc bao nhiêu độ (góc giữa trục hoành và tiếp tuyến của đồ thị tại giao điểm) ?

10. Cho các hàm số

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d\ ; \qquad (\mathscr{C})$$

$$g(x) = x^2 - 3x - 1.$$

a) Xác định b, c, d sao cho đồ thị $(\mathscr{C})$ đi qua các điểm $(1 ; 3)$, $(-1 ; -3)$ và

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3};$$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$;

c) Giải phương trình $f'(\sin t) = 3$;

d) Giải phương trình $f''(\cos t) = g'(\sin t)$;

e) Tìm giới hạn $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f''(\sin 5z) + 2}{g'(\sin 3z) + 3}$.

11. Chứng minh rằng tiếp tuyến của hypebol $y = \dfrac{a^2}{x}$ lập thành với các trục toạ độ một tam giác có diện tích không đổi.

12. Chứng minh rằng nếu hàm số $f(z)$ có đạo hàm đến cấp n thì

$$\left[f(ax + b)\right]_x^{(n)} = a^n f_z^{(n)}(ax + b).$$