

ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. Chứng minh các hệ thức sau :

a) $\sin \alpha + \sin \left(\alpha + \frac{14}{3} \pi \right) + \sin \left(\alpha - \frac{8}{3} \pi \right) = 0$;

b) $\frac{\sin 4a}{1 + \cos 4a} \cdot \frac{\cos 2a}{1 + \cos 2a} = \cot \left(\frac{3}{2} \pi - a \right)$;

c) $(\cos a - \cos b)^2 - (\sin a - \sin b)^2 = -4 \sin^2 \frac{a-b}{2} \cos(a+b)$;

d) $\sin^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(30^\circ - \alpha) - \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2\alpha) = \sin 2\alpha$.

2. Biến đổi thành tích

a) $1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha \right) - \sin \left(\frac{3}{2} \pi - 3\alpha \right) + \cot \left(\frac{5}{2} \pi + 3\alpha \right)$;

b) $\frac{\cos 7\alpha - \cos 8\alpha - \cos 9\alpha + \cos 10\alpha}{\sin 7\alpha - \sin 8\alpha - \sin 9\alpha + \sin 10\alpha}$;

c) $-\cos 5a \cos 4a - \cos 4a \cos 3a + 2 \cos^2 2a \cos a$.

3. Giả sử A, B, C là ba góc của tam giác ABC , chứng minh rằng :

a) $\frac{\sin C}{\cos A \cos B} = \tan A + \tan B$;

b) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$;

c) $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2}$.

4. Cho hàm số $y = \sin 4x$.

a) Chứng minh rằng $\sin 4\left(x + k \frac{\pi}{2}\right) = \sin 4x$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Từ đó vẽ đồ thị của các hàm số

$$y = \sin 4x ; \quad (C_1)$$

$$y = \sin 4x + 1. \quad (C_2)$$

b) Xác định giá trị của m để phương trình

$$\sin 4x + 1 = m \quad (1)$$

– Có nghiệm ;

– Vô nghiệm.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C_2) tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{24}$.

5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x + 1.$$

6. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{\tan x + \sin x}{\cot x}. \quad (C)$$

a) Tìm tập xác định của hàm số đã cho.

b) Xét tính chẵn, lẻ của hàm số.

c) Biến đổi biểu thức $\frac{\tan x + \sin x}{\cot x}$ thành tích.

d) Chứng tỏ rằng điểm $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{9}{2}\right)$ thuộc (C) .

7. Giải các phương trình

a) $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$;

b) $3 \sin 5x - 2 \cos 5x = 3$;

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x = 2 \cos 3x$;

d) $\sin 2z + \cos 2z = \sqrt{2} \sin 3z$.

8. Giải các phương trình

a) $\cos^2 x + \cos^2 2x - \cos^2 3x - \cos^2 4x = 0$;

b) $\cos 4x \cos(\pi + 2x) - \sin 2x \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4x$;

c) $\tan(120^\circ + 3x) - \tan(140^\circ - x) = 2 \sin(80^\circ + 2x)$;

$$d) \tan^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \cot \frac{x}{2} + \cot^2 \frac{x}{2} + \sin x = 4 ;$$

$$e) \frac{\sin 2t + 2 \cos^2 t - 1}{\cos t - \cos 3t + \sin 3t - \sin t} = \cos t.$$

9. Giải các phương trình

$$a) \cos(22^\circ - t) \cos(82^\circ - t) + \cos(112^\circ - t) \cos(172^\circ - t) = \frac{1}{2}(\sin t + \cos t) ;$$

$$b) \sin^2(t + 45^\circ) - \sin^2(t - 30^\circ) - \sin 15^\circ \cos(2t + 15^\circ) = \frac{1}{2} \sin 6t ;$$

$$c) \sin^8 2x + \cos^8 2x = \frac{41}{128} ;$$

$$d) \sqrt{4 \cos^2 x + 1} + \sqrt{4 \sin^2 x + 3} = 4 ;$$

$$e) \tan(\pi \cos t) = \cot(\pi \sin t).$$

10. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm tám chữ số, trong đó có đúng hai chữ số 2 ?

11. Một tổ có 10 học sinh trong đó có An, Bình, Chi, Dung và Hương. Có bao nhiêu cách xếp 10 bạn đó vào 10 ghế sắp thành hàng ngang sao cho An, Bình ngồi cạnh nhau và Chi, Dung, Hương cũng ngồi cạnh nhau ?

12. Một trăm tám thẻ như nhau được đánh số từ 1 đến 100. Lấy ngẫu nhiên một thẻ.

Kí hiệu A và B là các biến cố

A : "Thẻ được lấy ghi số chia hết cho 3",

B : "Thẻ được lấy ghi số chia hết cho 5".

a) Tính $P(A)$, $P(B)$;

b) A và B có độc lập không, vì sao ?

c) Cũng hỏi như trên nhưng số thẻ là 105 và được đánh số từ 1 đến 105.

13. Có hai hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 1 bi đỏ và 2 bi xanh, hộp thứ hai chứa 2 bi đỏ và 1 bi xanh. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên 1 bi. Tính xác suất sao cho 2 bi lấy ra cùng màu.

14. Tìm cấp số cộng a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , biết rằng

$$a_1 + a_3 + a_5 = -12 \text{ và } a_1 a_3 a_5 = 80.$$

15. Viết ba số hạng đầu của một cấp số cộng, biết rằng tổng n số hạng đầu tiên của cấp số này là

$$S_n = 4n^2 - 3n.$$

16. Giải phương trình

$$\frac{1}{x} + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{7}{2},$$

trong đó $|x| < 1$.

17. Tìm số hạng thứ nhất a_1 và công bội q của một cấp số nhân (a_n) , biết rằng

$$a_4 - a_2 = -1\frac{13}{32} \quad \text{và} \quad a_6 - a_4 = -\frac{45}{512}.$$

18. Chứng minh rằng ba số hạng đầu của tổng

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} + \frac{1}{3 - \sqrt{3}} + \frac{1}{6} + \dots$$

lập thành một cấp số nhân và tính tổng trên với giả thiết rằng các số hạng tiếp theo được tạo thành theo quy luật của cấp số nhân đó.

Trong các bài tập 19, 20, hãy tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

19. a) $x_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} ;$

b) $x_n = \sqrt[3]{1+n^3} - n ;$

c) $x_n = n^2 \left(n - \sqrt{n^2 + 1} \right) ;$

d) $x_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n ;$

20. a) $x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3 + n} - n} ;$

b) $x_n = \left(n - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1 - 4n}{2n^2} \right).$

21. Xét tính bị chặn của các dãy số với số hạng tổng quát sau :

a) $x_n = \frac{5n^2}{n^2 + 3} ;$

b) $y_n = (-1)^n \frac{2n}{n+1} \sin n ;$

c) $z_n = n \cos n\pi.$

22. Chứng minh rằng dãy số sau đây tăng và bị chặn trên :

$$x_1 = \frac{1}{5+1}, \quad x_2 = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1}, \quad x_3 = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \frac{1}{5^3+1}, \dots$$

$$x_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \dots + \frac{1}{5^n+1}, \dots$$

23. Tính các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$;

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$;

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$;

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$.

24. Tính các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2} \right)$;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2+1} - 3x \right)$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{2x^2-3} - 5x \right)$;

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$;

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$.

25. Tính các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$;

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$.

26. Tính đạo hàm của các hàm số sau :

$$\text{a) } y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2} ;$$

$$\text{b) } y = \frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2} ;$$

$$\text{c) } y = \cos 2x - 2 \sin x ;$$

$$\text{d) } y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} ;$$

$$\text{e) } y = \cos^2 \frac{x}{3} \tan \frac{x}{2} ;$$

$$\text{f) } y = \sqrt{\sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right)} ;$$

$$\text{g) } y = \cos \frac{x}{x+1} ;$$

$$\text{h) } y = \frac{x^2-1}{\sin 3x} ;$$

$$\text{i) } y = 3 \sin^2 x \cos x + \cos^2 x ;$$

$$\text{k) } y = \sqrt{7-4x} \cot 3x .$$

27. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ A & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Xác định A để $f(x)$ liên tục tại $x = 0$. Với giá trị A tìm được, hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ không ?

28. Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$. (C)

a) Tính y', y'' .

b) Tính $y'''(-1), y'''(2)$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$. (Đề thi Đại học khối D năm 2010)