§1 KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Hình dung được thế nào là một khối đa diện và một hình đa diện. Không yêu cầu phải hiểu và nhớ một cách cặn kẽ định nghĩa của các khái niệm đó.
2. Hiểu được rằng đối với các khối đa diện phức tạp, ta có thể phân chia chúng thành các khối đa diện đơn giản hơn. Điều đó được áp dụng trong việc tính thể tích.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Hình đa diện và khối đa diện là những khái niệm tuy rất trực quan, nhưng định nghĩa chính xác thì lại khá phức tạp và khó hiểu đối với học sinh.

   Dưới đây chúng tôi xin trình bày rõ hơn để các thầy giáo tham khảo.

> ***Định nghĩa hình đa diện***. *Hình đa diện là một hình $\mathcal{H}$ gồm một số hữu hạn đa giác thoả mãn ba tính chất sau đây :*
>
> *i) Hai đa giác bất kì hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.*

ii) Mỗi cạnh của một đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.

iii) Nếu $\mathscr{S}$ và $\mathscr{S}'$ là hai đa giác tuỳ ý thì có một dãy các đa giác $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2, \ldots \mathscr{S}_n$ sao cho $\mathscr{S}_1$ là $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}_n$ là $\mathscr{S}'$ và hai đa giác $\mathscr{S}_i$ và $\mathscr{S}_{i+1}$ có chung một cạnh với mọi $i = \overline{1, n-1}$.

Nhà toán học Jordan đã chứng minh định lí mang tên ông dưới đây :

Định lí Jordan : *Mỗi hình đa diện $\mathscr{H}$ chia các điểm không thuộc $\mathscr{H}$ thành hai tập hợp con không giao nhau $\mathscr{H}^0$ và $\mathscr{H}^1$ có các tính chất sau đây :*

i) Hai điểm cùng thuộc một trong hai tập hợp $\mathscr{H}^0$ hoặc $\mathscr{H}^1$ đều có thể nối với nhau bằng một đường gấp khúc không có điểm chung với $\mathscr{H}$.

ii) Nếu hai điểm lần lượt thuộc $\mathscr{H}^0$ và $\mathscr{H}^1$ thì mọi đường gấp khúc nối hai điểm đó đều có điểm chung với $\mathscr{H}$.

iii) Tập $\mathscr{H}^0$ không chứa đường thẳng nào, tập $\mathscr{H}^1$ có chứa những đường thẳng.

Định nghĩa khối đa diện. *Tập $\mathscr{H}^0$ trong định lí Jordan nói trên gọi là phần trong của $\mathscr{H}$, tập $\mathscr{H}^1$ gọi là phần ngoài của $\mathscr{H}$, tập hợp $\mathscr{H} \cup \mathscr{H}^0$ gọi là khối đa diện xác định bởi (hoặc giới hạn bởi) hình đa diện $\mathscr{H}$.*

Chứng minh định lí Jordan rất khó đối với học sinh phổ thông.

2. Để giới thiệu khái niệm khối đa diện, SGK đã dùng phương pháp mô tả một cách trực quan. Trước tiên, SGK đưa ra một số hình (mà sau này sẽ được gọi là hình đa diện) có các đặc điểm chung :

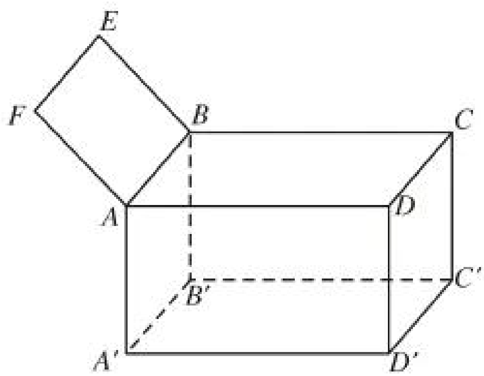
a) Mỗi hình $\mathscr{H}$ gồm một số hữu hạn đa giác.

b) Mỗi hình $\mathscr{H}$ đều phân chia không gian thành hai phần, phần bên trong và phần bên ngoài.

Ở đây khái niệm "phân chia" là hoàn toàn trực giác, để rõ thêm ta có thể hình dung khi bơm một chất khí có màu vào bên trong. Thực ra có thể định nghĩa "phân chia" một cách toán học như nội dung của định lí Jordan : Hai điểm cùng một phần (phần trong hoặc phần ngoài) khi và chỉ khi có thể nối với nhau bằng một đường gấp khúc không có điểm chung với hình $\mathscr{H}$. Dầu ta có nêu định nghĩa như thế nhưng ta vẫn không chứng minh tại sao các hình $\mathscr{H}$ lại có thể phân chia không gian thành hai phần, hoặc nêu ra những điều kiện của $\mathscr{H}$ để $\mathscr{H}$ phân chia không gian thành hai phần. Tóm lại ở đây ta thừa nhận định lí Jordan một cách trực giác, hay nói cách khác, ta chỉ xét những hình $\mathscr{H}$ thoả mãn định lí Jordan.

Để thấy rõ rằng không phải mỗi hình $\mathscr{H}$ có tính chất a) đều có tính chất b), ta chỉ cần nêu ra một ví dụ đơn giản là một hình hộp bỏ đi một mặt. Khi đó, ta không thể bơm khí màu vào "trong" $\mathscr{H}$ vì khí có thể tràn ra "ngoài".

Tuy vậy, không phải mỗi hình $\mathscr{H}$ có tính chất a) và b) đều là hình đa diện. Ví dụ ta lấy hình $\mathscr{H}$ gồm một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ được gắn thêm hình chữ nhật $ABEF$ (h.1). Khi đó, hình $\mathscr{H}$ thoả mãn cả hai tính chất a) và b) (nó cũng chia không gian thành hai phần : phần trong là phần trong của hình hộp chữ nhật, phần ngoài gồm những điểm không thuộc phần trong và không thuộc $\mathscr{H}$).



Hình 1

Tuy nhiên, hình $\mathscr{H}$ không phải là hình đa diện theo định nghĩa đã biết vì cạnh AB là cạnh chung của ba miền đa giác : $ABCD$, $ABEF$ và $ABB'A'$.

Cuối cùng, SGK đưa ra khái niệm hình đa diện với hai điều kiện i) và ii) đã nói ở 1). Điều kiện iii) không nêu ra vì ta đã buộc hình $\mathscr{H}$ phải chia không gian thành hai phần.

3. Chú ý rằng đối với hình đa diện lồi thì việc chứng minh định lí Jordan khá dễ dàng. Hình đa diện được gọi là lồi nếu nó giới hạn một khối đa diện lồi. Tuy nhiên, lớp các hình đa diện lồi là quá hẹp, trong thực tế ta thường gặp những hình đa diện không lồi mà ta vẫn cần tính thể tích của chúng.

4. Khái niệm phân chia một khối đa diện thành các khối đa diện được định nghĩa không khó khăn và có thể mô tả một cách trực quan. Tuy nhiên, chứng minh mệnh đề *"Có thể phân chia mọi khối đa diện thành các khối tứ diện"* lại không đơn giản chút nào.

III. TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

$\boxed{?1}$ Ta không thể nói rằng có khối đa diện giới hạn bởi hình $\mathscr{H}'$ vì hình $\mathscr{H}'$ không chia không gian thành hai phần mà một phần có thể tô màu còn phần kia thì không.

1

Các hình 1a, 1b, 1c, 1d, 1e đều thoả mãn hai điều kiện 1) và 2). Hình 2b không thoả mãn điều kiện 2) vì cạnh AB không phải là cạnh chung của hai đa giác.

$\boxed{?2}$ Có thể phân chia khối chóp bất kì thành các khối tứ diện. Chẳng hạn khối chóp $S.A_1A_2A_3...A_n$ có thể phân chia thành các khối tứ diện sau đây : $SA_1A_2A_3, SA_2A_3A_4, ..., SA_{n-1}A_nA_1$.

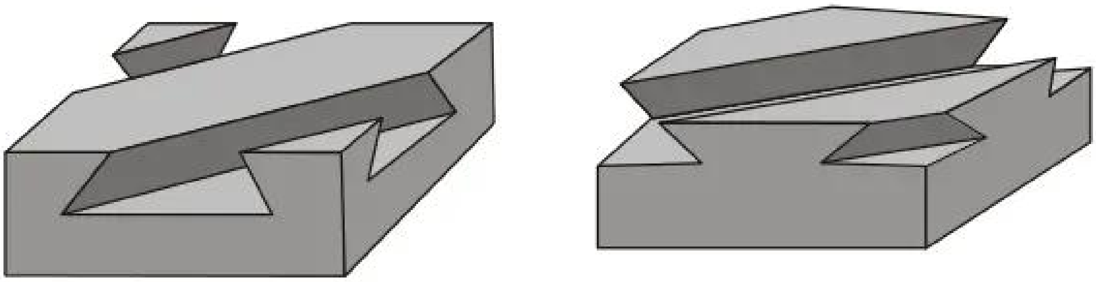
2

1) Cắt khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bởi mặt phẳng $(A'BC)$ thì nó được phân chia thành hai khối chóp $A'.ABC$ và $A'.BB'C'C$.

2) Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể phân chia thành ba khối tứ diện bằng nhiều cách, chẳng hạn có thể chia thành ba khối tứ diện $AA'BC$, $BB'A'C'$, $CC'A'B$.

Vui một chút

Có thể làm hai miếng gỗ như hình 2 để ghép lại thành hình 6 trong SGK.

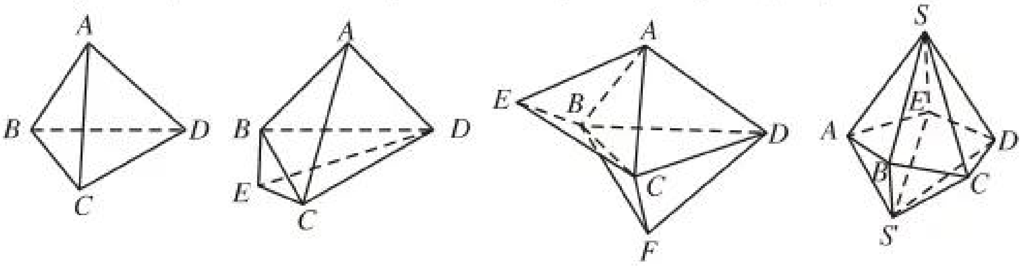


Hình 2

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

1. Gọi số cạnh của khối đa diện là C, số mặt là M. Vì mỗi mặt có ba cạnh và mỗi cạnh lại chung cho hai mặt nên $3M = 2C$. Suy ra M là số chẵn.

Sau đây là một số khối đa diện có các mặt là tam giác (h.3)



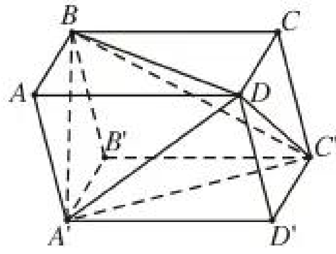
$M = 4$ $M = 6$ $M = 8$ $M = 10$

Hình 3

2. Giả sử khối đa diện có C cạnh và có $Đ$ đỉnh. Vì mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh và mỗi cạnh có hai đỉnh nên $3Đ = 2C$, vậy $Đ$ phải là số chẵn.

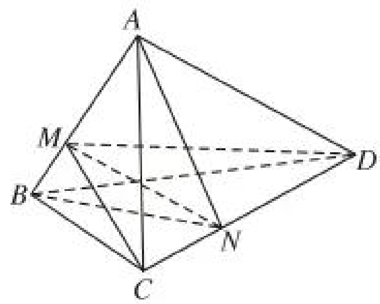
3. Gọi A là một đỉnh của khối đa diện. Theo giả thiết, đỉnh A là đỉnh chung cho ba cạnh, ta gọi ba cạnh đó là AB, AC, AD. Cạnh AB phải là cạnh chung của hai mặt tam giác, đó là hai mặt ABC và ABD (vì qua đỉnh A chỉ có 3 cạnh). Tương tự, ta có các mặt tam giác ACD và BCD. Vậy khối đa diện đó chính là khối tứ diện $ABCD$.

4. Có thể phân chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành năm khối tứ diện sau đây : $ABDA'$, $CBDC'$, $B'A'C'B$, $D'A'C'D$, $BDA'C'$ (h.4).



Hình 4

5. Cho khối tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M nằm giữa A và B, điểm N nằm giữa C và D. Bằng hai mặt phẳng (MCD) và (NAB), ta chia khối tứ diện đã cho thành bốn khối tứ diện : $AMCN$, $AMND$, $BMCN$, $BMND$ (h.5).



Hình 5