§1 MẶT CẦU, KHỐI CẦU

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Hiểu được định nghĩa mặt cầu, hình cầu, vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng, giữa mặt cầu và đường thẳng.
2. Nhận biết được một số hình đa diện có mặt cầu ngoại tiếp, xác định được tâm và tính được bán kính của mặt cầu đó.
3. Nhớ được các công thức về diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu và áp dụng vào các bài tập.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Khái niệm mặt cầu được định nghĩa tương tự như khái niệm đường tròn trong mặt phẳng. Trong không gian Ơ-clit n chiều ($n \geq 1$), khái niệm mặt cầu (thường gọi là siêu cầu) được định nghĩa hoàn toàn giống nhau. Trong không gian 3 chiều, khái niệm mặt cầu khá là trực quan và dễ hiểu đối với học sinh. Luôn luôn có thể lấy hình ảnh trực quan để miêu tả các khái niệm mặt cầu, ví dụ : một quả bóng đặt trên mặt bàn là hình ảnh của một mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng, giao tuyến của mặt cầu và mặt phẳng có thể minh hoạ bằng việc cắt quả dưa hấu (thật "tròn") bởi một nhát cắt phẳng.
2. Phương pháp chứng minh mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu hoặc đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu tương tự như cách chứng minh đường thẳng tiếp xúc với đường tròn trong hình học phẳng. Tuy nhiên, cần nhấn mạnh rằng tại mỗi điểm thuộc mặt cầu, có vô số đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu và các đường thẳng ấy cùng nằm trong mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm đó. Cũng cần lưu ý rằng : Nếu Δ là một đường thẳng tiếp xúc với một mặt cầu thì bất cứ mặt phẳng nào chứa Δ mà cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn thì Δ tiếp xúc với đường tròn đó.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1

a) Ta có :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2$$

$$= \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}\right)^2$$

$$= 4\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + \overrightarrow{GD}^2 + 2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}).$$

Vì G là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, và vì cạnh của tứ diện đó bằng a nên $GA = GB = GC = GD = a\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Vậy ta có :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + \frac{3}{2}a^2.$$

b) Giả thiết đã cho của ví dụ 2 tương đương với :

$$2a^2 = 4MG^2 + \frac{3}{2}a^2 \Leftrightarrow MG = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

c) Vậy tập hợp các điểm M là mặt cầu tâm G, bán kính $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

2

$$M \in (P) \cap S(O;R) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ M \in S(O\,;R) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ OM = R \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ HM^2 = OM^2 - OH^2 = R^2 - d^2. \end{cases}$$

3

a) Khi $d < R$, giao của (P) và $S(O\,;R)$ là đường tròn nằm trong (P), có tâm H và có bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

b) Khi $d = R$, giao của (P) và $S(O\,;R)$ là điểm H.

c) Khi $d > R$, giao của (P) và $S(O\,;R)$ là tập rỗng.

$\boxed{?1}$ Đúng.

4

a) Các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$ của hình chóp nằm trên mặt phẳng đáy của hình chóp và đồng thời nằm trên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp nên chúng nằm trên đường tròn giao tuyến của mặt phẳng đáy và mặt cầu. Vậy đa giác đáy của hình chóp nội tiếp đường tròn đó.

b) Nếu hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$ có đáy $A_1\,A_2\ldots A_n$ là đa giác nội tiếp đường tròn $(\mathscr{C})$ thì ta gọi Δ là trục của đường tròn đó và gọi O là giao điểm của Δ với mặt phẳng trung trực của một cạnh bên, chẳng hạn cạnh SA_1. Khi đó $OS = OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$. Vậy hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp, đó là mặt cầu tâm O bán kính $R = SO$.

$\boxed{?2}$ Hình tứ diện có thể xem là hình chóp mà đáy là tam giác, và vì tam giác luôn nội tiếp đường tròn nên tứ diện luôn nội tiếp mặt cầu.

$\boxed{?3}$ Nếu hình lăng trụ có cạnh bên không vuông góc với đáy thì nó phải có ít nhất một mặt bên là hình bình hành mà không phải là hình chữ nhật. Hình bình hành đó không nội tiếp đường tròn nên hình lăng trụ không nội tiếp mặt cầu.

$\boxed{?4}$ Mệnh đề a) đúng vì Δ tiếp xúc với $S(O\,;\,R)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} OH = R \\ OM > R \quad \forall M \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow OH \perp \Delta.$$

Mệnh đề b) đúng vì mọi đường thẳng vuông góc với OH tại H đều tiếp xúc với mặt cầu. Các đường thẳng đó nằm trên mặt phẳng vuông góc với OH tại H, đó chính là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại H.

5

Vì O là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$ nên $OA = OB = OC = OD$. Từ đó suy ra các tam giác cân OAB, OAC, OAD, OBC, OCD, ODB bằng nhau. Vậy khoảng cách từ O tới các cạnh của tứ diện bằng nhau, chẳng hạn bằng h, suy ra tất cả các cạnh của tứ diện đều tiếp xúc với mặt cầu tâm O bán kính h.

$\boxed{?5}$ Không, vì nếu h là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu tới đường thẳng đó thì $h \le OA < R$ (R là bán kính mặt cầu).

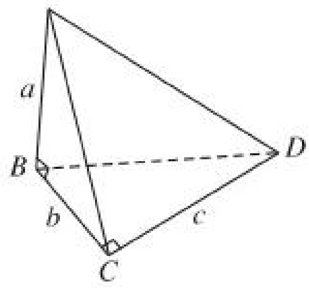
6

Vì AH là tiếp tuyến của đường tròn $(\mathscr{C})$ tại H nên khoảng cách từ O tới đường thẳng AH bằng R, vậy AH cũng tiếp xúc với mặt cầu tại H.

a) Trong tam giác vuông OHA, ta có $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{d^2 - R^2}$.

b) Vì HI là đường cao của tam giác vuông OHA nên $OI.OA = OH^2$ hay $OI = \frac{R^2}{d}$ (không đổi). Suy ra I là điểm cố định và do đó H nằm trên mp(P) vuông góc với OA tại I. Ngoài ra, vì H còn nằm trên mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ nên H nằm trên đường tròn giao tuyến của mặt cầu và mp(P).

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP



Hình 36

1. (h.36) Vì $AB \perp BC$ và $AB \perp CD$ nên $AB \perp BD$, tương tự ta có $DC \perp AC$. Vậy các điểm A, B, C, D cùng nằm trên mặt cầu đường kính AD.

Vì $AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2$ nên bán kính mặt cầu đó là $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2. a) I là tâm của mặt cầu đi qua hai điểm phân biệt A, B cho trước khi và chỉ khi $IA = IB$. Vậy tập hợp tâm của các mặt cầu đó là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

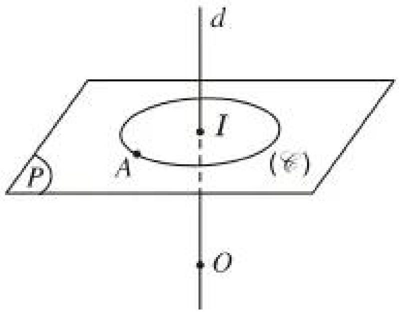
b) I là tâm của mặt cầu đi qua ba điểm phân biệt A, B, C cho trước khi và chỉ khi $IA = IB = IC$. Vậy :

+ Nếu ba điểm A, B, C không thẳng hàng thì tập hợp các điểm I là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

+ Nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng thì tập hợp các điểm I là rỗng.

c) I là tâm của mặt cầu đi qua đường tròn $(\mathscr{C})$ cho trước khi và chỉ khi I cách đều mọi điểm của đường tròn. Vậy tập hợp các điểm I là trục của đường tròn $(\mathscr{C})$.

d) Gọi M là một điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa đường tròn $(\mathscr{C})$. Lấy điểm A nằm trên $(\mathscr{C})$ và gọi I là giao điểm của trục đường tròn và mặt phẳng trung trực của MA. Khi đó, mặt cầu tâm I, bán kính $R = IA = IM$ là mặt cầu đi qua đường tròn $(\mathscr{C})$ và đi qua điểm M.

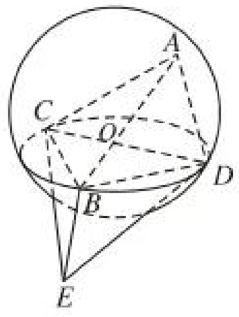


Hình 37

3. Cả a) và b) đều đúng.

4. Giả sử (S) là một mặt cầu đi qua A, có tâm O nằm trên d (h.37). Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d. Khi đó, (P) cắt mặt cầu (S)

theo đường tròn ($\mathscr{C}$) có tâm là giao điểm I của (P) và d, có bán kính $r = IA$. Vậy đường tròn ($\mathscr{C}$) cố định và mặt cầu (S) luôn luôn đi qua đường tròn cố định đó.



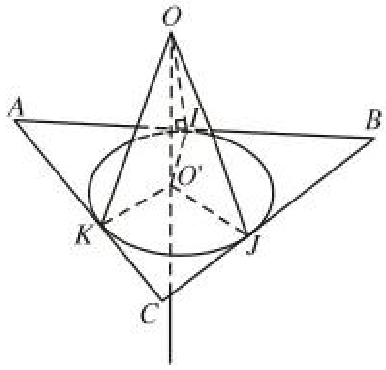
Hình 38

5. a) Đúng.

b) Không đúng. Ví dụ : Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu (S) (h.38). Lấy một điểm E nằm khác phía với A đối với mp(BCD) sao cho E không nằm trên (S). Xét hình đa diện $ABCDE$ có sáu mặt là các tam giác ABC, ABD, ADC, EBC, ECD, EDB. Các mặt đó đều nội tiếp đường tròn nhưng hình đa diện $ABCDE$ không nội tiếp mặt cầu.

Thật vậy, nếu có mặt cầu đi qua các đỉnh A, B, C, D, E thì nó phải đi qua A, B, C, D nên nó chính là mặt cầu (S), nhưng E lại không nằm trên (S), vô lí.

6. (h.39)



Hình 39

a) Mặt cầu tâm O tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA (của tam giác ABC) lần lượt tại các điểm I, J, K khi và chỉ khi

$OI \perp AB, OJ \perp BC, OK \perp CA, OI = OJ = OK.$ (*)

Gọi O' là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mp(ABC) thì các điều kiện (*) tương đương với

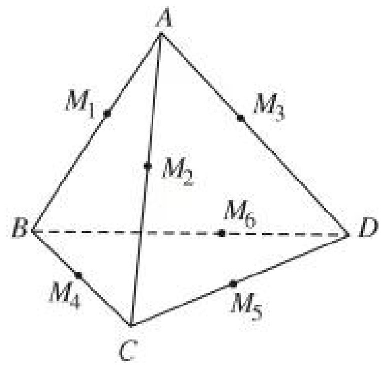
$O'I \perp AB, O'J \perp BC, O'K \perp CA, O'I = O'J = O'K,$

hay O' là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Từ đó suy ra tập hợp các điểm O là trục của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

b) Giả sử có mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của tứ diện $ABCD$ tại các điểm $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ như trên hình 40. Khi đó ta có :

$$AM_1 = AM_2 = AM_3,\ BM_1 = BM_6 = BM_4,$$
$$CM_5 = CM_2 = CM_4,\ DM_5 = DM_6 = DM_3.$$



Hình 40

Suy ra :

$$\begin{aligned} & AM_1 + BM_1 + CM_5 + DM_5 \\ & \quad = AM_2 + CM_2 + BM_6 + DM_6 \\ & \quad = AM_3 + DM_3 + BM_4 + CM_4 \end{aligned}$$

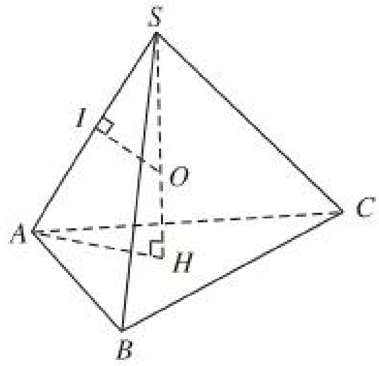
hay $\quad AB + CD = AC + BD = AD + BC.$

Chú ý. Mệnh đề đảo của câu b) cũng đúng, tức là : nếu tứ diện có tổng các cạnh đối bằng nhau thì có mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện.

7. a) Giả sử SH là đường cao của hình chóp đều $S.ABC$ (h.41). Khi đó, vì $SA = SB = SC$ nên mọi điểm nằm trên SH cách đều A, B và C.

Trong mặt phẳng (SAH), đường trung trực của SA cắt SH tại O thì O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính của mặt cầu là $R = SO$.

Gọi I là trung điểm của SA thì tứ giác $AHOI$ nội tiếp nên



Hình 41

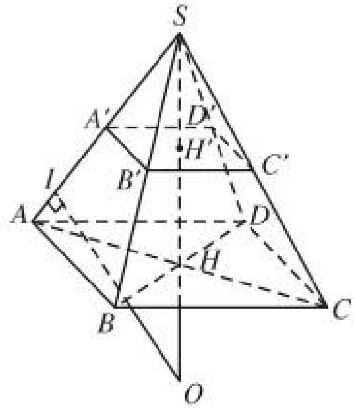
$$SO.SH = SI.SA \text{ hay } SO = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{SA^2}{2h}.$$

Ta có $SA^2 = SH^2 + AH^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2 + 3h^2}{3}$.

Suy ra $R = SO = \frac{a^2 + 3h^2}{6h}$.

Vậy thể tích khối cầu phải tìm là $\frac{\pi\left(a^2 + 3h^2\right)^3}{162h^3}$.

b) Gọi SH là đường cao của hình chóp đều $S.ABCD$ thì H là tâm của hình vuông $ABCD$ và SH đi qua tâm H' của hình vuông $A'B'C'D'$ (h.42). Mọi điểm nằm trên SH đều cách đều bốn điểm A, B, C, D và cũng cách đều bốn điểm A', B', C', D'. Trên đường thẳng SH, ta xác định điểm O sao cho $OA = OA'$ thì O cách đều tám điểm A, B, C, D, A', B', C', D', tức là tám điểm đó nằm trên mặt cầu tâm O, bán kính $R = OA$. Điểm O là giao điểm của đường thẳng SH và mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AA'.



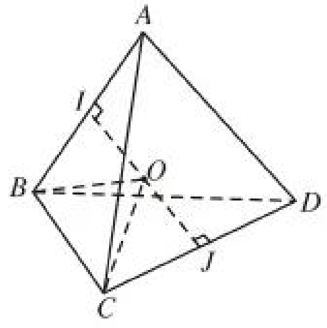
Hình 42

Ta chú ý rằng SAC là tam giác vuông cân. Gọi I là trung điểm của AA' thì SIO cũng là tam giác vuông cân đỉnh I nên $OI = SI = \frac{3a}{4}$. Suy ra :

$$R = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Vậy thể tích khối cầu phải tìm là $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{10}}{24}$.



Hình 43

8. a) (h.43) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì dễ thấy $IJ \perp AB$ và $IJ \perp CD$, bởi vậy nếu gọi O là trung điểm của IJ thì $OA = OB$ và $OC = OD$. Ngoài ra, vì $AB = CD = c$ nên hai tam giác vuông OIB và OJC bằng nhau, do đó $OB = OC$. Vậy O cách đều bốn đỉnh A, B, C, D. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có tâm O và có bán kính $R = OA$. Ta có :

$$OA^2 = OI^2 + AI^2 = \frac{IJ^2}{4} + \frac{AB^2}{4} = \frac{IJ^2 + c^2}{4}.$$

Vì CI là trung tuyến của tam giác ABC nên

$$CI^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Suy ra $IJ^2 = CI^2 - CJ^2 = \dfrac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} - \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$.

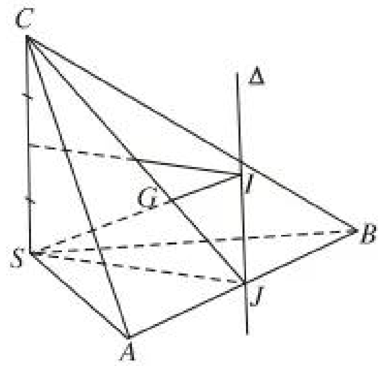
Như vậy $R^2 = OA^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{8}$ và diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là :

$$S = 4\pi R^2 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

b) Các mặt của hình tứ diện là các tam giác bằng nhau (đều có ba cạnh bằng a, b, c) nên các đường tròn ngoại tiếp các tam giác đó có bán kính r bằng nhau. Các đường tròn đó đều nằm trên mặt cầu $(O\ ;\ R)$ nên khoảng cách từ tâm O tới các mặt phẳng chứa các đường tròn đó bằng nhau và bằng $h = \sqrt{R^2 - r^2}$.

Vậy mặt cầu tâm O, bán kính h là mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

9. (h.44) Gọi J là trung điểm của AB. Vì tam giác SAB vuông ở S nên $JS = JA = JB$. Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với mp(SAB) tại J thì mọi điểm trên Δ đều cách đều ba điểm S, A, B. Bởi vậy, nếu gọi I là giao điểm của Δ và mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng SC thì I cách đều bốn điểm S, A, B, C. Vậy mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$ có tâm I và có bán kính $R = IA$.



Hình 44

Ta có

$$R^2 = IA^2 = IJ^2 + AJ^2$$
$$= \left(\frac{SC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}.$$

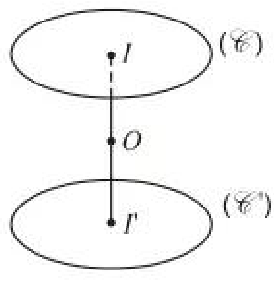
Diện tích mặt cầu là :

$$S = 4\pi R^2 = \pi(a^2 + b^2 + c^2).$$

Vì $SC \,//\, IJ$ nên SI cắt CJ tại một điểm G và do $SC = 2IJ$ nên $CG = 2GJ$. Vì CJ là trung tuyến của tam giác ABC nên G là trọng tâm tam giác ABC.

10. a) Nếu $\mathscr{H}$ là hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp thì các mặt bên là những hình bình hành có đường tròn ngoại tiếp nên phải là hình chữ nhật. Vậy $\mathscr{H}$ là lăng trụ đứng. Ngoài ra, vì $\mathscr{H}$ có mặt cầu ngoại tiếp nên mặt đáy phải là đa giác có đường tròn ngoại tiếp.

Ngược lại, cho $\mathscr{H}$ là lăng trụ đứng có các đường tròn $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ ngoại tiếp các đa giác đáy (h.45). Gọi I và I' là tâm của hai đường tròn đó thì II' là trục của cả hai đường tròn. Vì thế, nếu gọi O là trung điểm của đoạn thẳng II' thì O cách đều tất cả các đỉnh của hình lăng trụ đã cho. Vậy hình lăng trụ ấy có mặt cầu ngoại tiếp.



Hình 45

b) Nếu hình hộp $\mathscr{H}$ nội tiếp mặt cầu $S(O\,;\,R)$ thì các mặt của $\mathscr{H}$ phải là những hình chữ nhật, vậy $\mathscr{H}$ là hình hộp chữ nhật mà O là giao điểm của các đường chéo và độ dài đường chéo là $d = 2R$. Gọi x, y, z là ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó thì $x^2 + y^2 + z^2 = d^2 = 4R^2$.

Gọi S là diện tích toàn phần của hình hộp thì ta có :

$$S = 2xy + 2yz + 2zx \leq x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 + x^2 = 8R^2.$$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất là $8R^2$ khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, tức là khi $\mathscr{H}$ là hình lập phương.