§2 PHÉP ĐỐI XỨNG QUA MẶT PHẲNG VÀ SỰ BẰNG NHAU CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Hiểu được định nghĩa của phép đối xứng qua mặt phẳng và tính chất "bảo tồn khoảng cách" của nó.

2. Nhận biết được một mặt phẳng nào đó có phải là mặt phẳng đối xứng của một hình đa diện hay không.

3. Hiểu được định nghĩa của phép dời hình.

4. Nhận biết được hai hình đa diện bằng nhau trong các trường hợp không phức tạp.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Phần này chủ yếu làm cho học sinh nắm được một số khái niệm cơ bản : phép đối xứng qua mặt phẳng, phép dời hình, mặt phẳng đối xứng của hình đa diện, sự bằng nhau của hình đa diện.

2. SGK nêu lên nhưng không chứng minh các tính chất cơ bản của phép dời hình như : biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến mặt phẳng thành mặt phẳng, biến một góc thành góc có cùng số đo,... vì chúng tương tự như các tính chất của phép dời hình trong mặt phẳng.

3. Đối với các khối đa diện lồi, người ta chứng minh được mệnh đề : *Nếu phép dời hình F biến tập các đỉnh của khối đa diện lồi $\mathscr{H}$ thành tập các đỉnh của khối đa diện lồi $\mathscr{H}'$ thì F biến $\mathscr{H}$ thành $\mathscr{H}'$.*

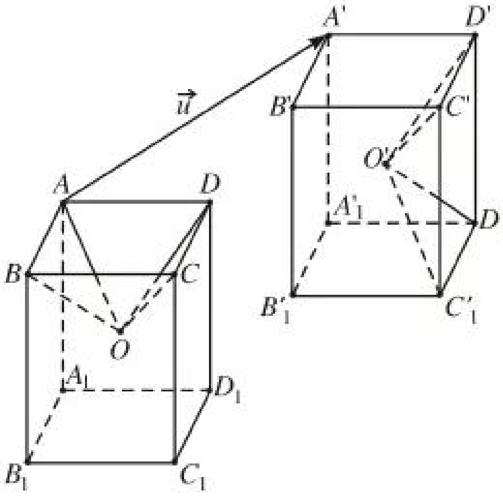
Trong các bài tập, ta chỉ đòi hỏi học sinh chứng minh sự bằng nhau của các khối đa diện lồi. Bởi vậy chỉ cần tìm phép dời hình F thoả mãn điều kiện nói trong mệnh đề trên.

4. Đối với các khối đa diện không lồi, mệnh đề trên không đúng. Có thể nêu ví dụ sau :

Giả sử phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}$ biến hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ thành hình hộp chữ nhật $A'B'C'D'.A'_1B'_1C'_1D'_1$. Khi đó, tâm O của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ biến thành tâm O' của hình hộp $A'B'C'D'.A'_1B'_1C'_1D'_1$. Ta xét hai khối đa diện sau :

Khối đa diện $\mathscr{H}$ có 9 đỉnh $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1, O$ và các mặt là : 5 hình chữ nhật ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DAA_1D_1, $A_1B_1C_1D_1$ và 4 tam giác OAB, OBC, OCD, ODA.

Khối đa diện $\mathscr{H}'$ có 9 đỉnh $A', B', C', D', A'_1, B'_1, C'_1, D'_1, O'$ và các mặt là : 5 hình chữ nhật $A'B'C'D'$, $B'C'C'_1B'_1$, $A'_1B'_1C'_1D'_1$, $A'_1D'_1D'A'$, $A'B'B'_1A'_1$ và 4 tam giác $O'C'D'$, $O'D'D'_1$, $O'D'_1C'_1$, $O'C'_1C'$.



Hình 6

Khi đó, phép tịnh tiến T biến tập hợp các đỉnh của $\mathscr{H}$ thành tập hợp các đỉnh của $\mathscr{H}'$ nhưng rõ ràng F không biến $\mathscr{H}$ thành $\mathscr{H}'$.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1

Nếu có ít nhất một trong hai điểm M, N không nằm trên (P) thì qua bốn điểm M, N, M', N' có một mặt phẳng (Q) (MM' và NN' cùng vuông góc với (P) nên song song với nhau). Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q) thì trong mp(Q), phép đối xứng qua đường thẳng Δ biến hai điểm M, N thành hai điểm M' và N' nên $MN = M'N'$.

$\boxed{?1}$ Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có 9 mặt phẳng đối xứng : 3 mặt phẳng trung trực của ba cạnh AB, AD, AA' và 6 mặt phẳng mà mỗi mặt đi qua hai cạnh đối diện.

2

Hình bát diện đều $ABCDEF$ có tất cả 9 mặt phẳng đối xứng. Ngoài ba mặt phẳng $(ABCD)$, $(BEDF)$, $(AECF)$, còn có 6 mặt phẳng, mỗi mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của hai cạnh song song (chẳng hạn AB và CD).

$\boxed{?2}$ Hai mặt cầu có bán kính bằng nhau thì bằng nhau. Phép đối xứng qua mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng nối tâm của hai mặt cầu là phép dời hình biến mặt cầu này thành mặt cầu kia.

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

6. a) a trùng với a' khi a nằm trên mp(P) hoặc a vuông góc với mp(P).

b) a song song với a' khi a song song với mp(P).

c) a cắt a' khi a cắt mp(P) nhưng không vuông góc với (P).

d) a và a' không bao giờ chéo nhau.

7. a) Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các mặt phẳng đối xứng sau đây : mp(SAC), mp(SBD), mặt phẳng trung trực của AB (đồng thời của CD) và mặt phẳng trung trực của AD (đồng thời của BC).

b) Hình chóp cụt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có ba mặt phẳng đối xứng, đó là ba mặt phẳng trung trực của ba cạnh AB, BC, CA.

c) Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ (mà không có mặt nào là hình vuông) có ba mặt phẳng đối xứng, đó là ba mặt phẳng trung trực của ba cạnh AB, AD, AA'.

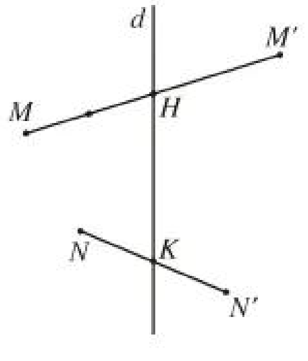
8. a) Gọi O là tâm của hình lập phương. Rõ ràng phép đối xứng tâm O biến các đỉnh của hình chóp $A.A'B'C'D'$ thành các đỉnh của hình chóp $C'.ABCD$. Vậy hai hình chóp đó bằng nhau.

b) Phép đối xứng qua mp($ADC'B'$) biến các đỉnh của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các đỉnh của hình lăng trụ $AA'D'.BB'C'$ nên hai hình lăng trụ đó bằng nhau.

9. • Nếu phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{v}$, suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ và do đó $MN = M'N'$. Vậy phép tịnh tiến là một phép dời hình.

• Giả sử phép đối xứng qua đường thẳng d biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' (h.7). Gọi H và K lần lượt là trung điểm của MM' và NN', ta có :

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'} = 2\overrightarrow{HK},\ \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'}$$
$$= \overrightarrow{HN} - \overrightarrow{HM} - \overrightarrow{HN'} + \overrightarrow{HM'}$$
$$= \overrightarrow{N'N} + \overrightarrow{MM'}.$$



Hình 7

Vì hai vectơ $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{NN'}$ đều vuông góc với $\overrightarrow{HK}$ nên

$$\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'}\right).\left(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'}\right) = 2\overrightarrow{HK}.\left(\overrightarrow{N'N} + \overrightarrow{MM'}\right) = 0.$$

Suy ra $\overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{M'N'}^2$ hay $MN = M'N'$. Vậy phép đối xứng qua d là phép dời hình.

• Nếu phép đối xứng tâm O biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON'} = -\overrightarrow{ON}$, suy ra

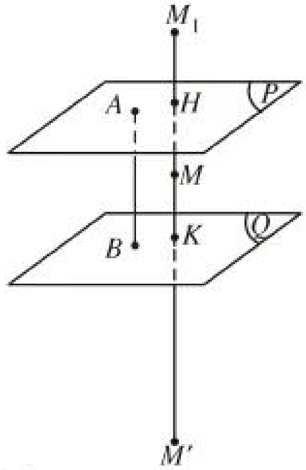
$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NM}.$$

Do đó $M'N' = MN$, suy ra phép đối xứng tâm O là một phép dời hình.

10. a) (h.8a) Lấy hai điểm A và B lần lượt nằm trên (P) và (Q) sao cho $AB \perp (P)$. Với một điểm M bất kì, ta gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua mp(P) và M' là điểm đối xứng với M_1 qua mp(Q).

Như vậy, M' là ảnh của M qua phép hợp thành của phép đối xứng qua mp(P) và phép đối xứng qua mp(Q).

Gọi H và K lần lượt là trung điểm của MM_1 và M_1M' thì ta có :



$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\left(\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{M_1K}\right) = 2\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{AB}.$$

Hình 8a

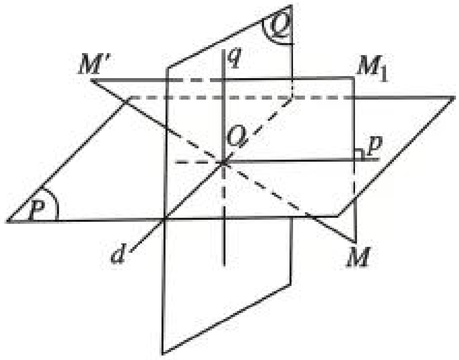
Như vậy phép hợp thành nói trên chính là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$.

b) Giả sử F là hợp thành của phép đối xứng qua mp(P) và phép đối xứng qua mp(Q), trong đó (P) vuông góc với (Q). Ta gọi d là giao tuyến của (P) và (Q).

Với một điểm M bất kì, ta gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua mp(P) và M' là điểm đối xứng với M_1 qua mp(Q). Như vậy, M' là ảnh của M qua phép hợp thành F.

Nếu M nằm trên (P) hoặc trên (Q) thì dễ thấy M' là điểm đối xứng của M qua d.

Nếu M không nằm trên cả (P) và (Q) thì ba điểm M, M_1 và M' xác định cho ta mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q), do đó vuông góc với d.



Hình 8b

Gọi giao tuyến của (R) với (P) và (Q) lần lượt là p và q, còn O là giao điểm của p và q. Khi đó, O nằm trên d. Xét trong mặt phẳng (R) thì điểm M' là ảnh của điểm M qua hợp thành của phép đối xứng qua đường thẳng p và phép đối xứng qua đường thẳng q. Suy ra O là trung điểm của MM'. Mặt khác $MM' \perp d$ nên F là phép đối xứng qua đường thẳng d.