§2 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Hiểu được rằng trong không gian toạ độ, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó ba số A, B, C không đồng thời bằng 0 (hoặc tương đương với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$). Ngược lại mỗi phương trình như thế đều là phương trình của một mặt phẳng nào đó.
2. Khi cho phương trình của mặt phẳng, học sinh phải xác định được vectơ pháp tuyến của nó, xác định được toạ độ của một số điểm của nó. Học sinh nhận ra các trường hợp đặc biệt về vị trí của mặt phẳng (so với hệ trục toạ độ) căn cứ trên phương trình của nó.
3. Biết cách viết phương trình mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và có vectơ pháp tuyến cho trước, đồng thời biết cách đưa về trường hợp cơ bản đó để viết phương trình mặt phẳng trong những trường hợp khác.
4. Có thể nhận biết nhanh chóng vị trí tương đối của hai mặt phẳng căn cứ vào phương trình của chúng.
5. Nhớ và vận dụng được công thức tính khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng, và áp dụng vào các bài toán khác.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. SGK không đưa ra khái niệm cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng và do đó cũng không giới thiệu phương trình tham số của mặt phẳng. Như vậy, học sinh chỉ biết một loại phương trình mặt phẳng mà trước đây ta gọi là phương trình tổng quát (nay chỉ nói gọn là phương trình mặt phẳng).
2. Công thức tính khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng được đưa ra nhưng không chứng minh vì nó hoàn toàn tương tự như trong hình học phẳng. Chỉ cần làm cho học sinh nhớ được công thức đó và vận dụng nó trong các bài toán tìm khoảng cách khác : khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song,...

Cũng xin lưu ý rằng SGK không nêu điều kiện để hai điểm nằm cùng phía hay khác phía đối với một mặt phẳng.

3. SGK không có một mục riêng nói về góc (góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng). Học sinh đã biết cách tính góc giữa hai vectơ, và từ đó tính được góc giữa hai đường thẳng. Ngoài ra, ở lớp 11, khái niệm góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng được định nghĩa dựa vào góc giữa hai đường thẳng.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1

Mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua trung điểm I của AB và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}$.

Ta có $I = (-2\,;-1\,;2)$ và $\overrightarrow{AB} = (-6\,;2\,;-2)$. Vậy (P) có phương trình :

$$-6(x+2)+2(y+1)-2(z-2)=0 \quad \text{hay} \quad 3x-y+z+3=0.$$

2

Giả sử $(x_0\,;y_0\,;z_0)$ là một nghiệm của phương trình :

$$Ax+By+Cz+D=0 \ (2) \ (\text{với } A^2+B^2+C^2>0),$$

tức là $\quad Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ hay $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0\,;y_0\,;z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A\,;B\,;C)$ thì (P) có phương trình :

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Leftrightarrow \ Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0,$$

hay $\quad Ax+By+Cz+D=0$, đây chính là phương trình (2).

3

a) Mặt phẳng (α) đi qua gốc toạ độ $O(0\,;0\,;0)$ khi và chỉ khi

$$A.0+B.0+C.0+D=0 \text{ hay } D=0.$$

b) Mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Ox khi và chỉ khi $\vec{n}.\vec{i}=0$ (trong đó $\vec{n}=(A\,;B\,;C)$ là vectơ pháp tuyến của (α)), nghĩa là

$$A.1+B.0+C.0=0 \text{ hay } A=0.$$

Tương tự, mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oy khi và chỉ khi $B = 0$,

mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oz khi và chỉ khi $C = 0$.

c) Mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với mp(Oxy) khi và chỉ khi $\vec{n}$ và $\vec{k}$ cùng phương, tức là $A = B = 0$.

Tương tự, mp(α) song song hoặc trùng với mp(Oyz) khi và chỉ $B = C = 0$,

mp(α) song song hoặc trùng với mp(Oxz) khi và chỉ $A = C = 0$.

?1 Nếu hai mặt phẳng (α) và (α') song song hoặc trùng nhau thì hai vectơ $\vec{n}(A\,;B\,;C)$ và $\vec{n'}(A'\,;B'\,;C')$ cùng phương. Bởi vậy, nếu hai vectơ $\vec{n}$ và $\vec{n'}$ không cùng phương, tức là $A : B : C \neq A' : B' : C'$, thì (α) và (α') cắt nhau.

4

a) Nếu $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'}$ thì hệ gồm hai phương trình của (α) và (α') vô nghiệm, suy ra hai mặt phẳng (α) và (α') song song.

b) Nếu $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'}$ thì có số $t \neq 0$ sao cho $A = tA'$, $B = tB'$, $C = tC'$, $D = tD'$. Khi đó :

Điểm $M_0(x_0\,;y_0\,;z_0)$ thuộc (α) khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
&Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0\\
\Leftrightarrow\ &t(A'x_0 + B'y_0 + C'z_0 + D') = 0\\
\Leftrightarrow\ &A'x_0 + B'y_0 + C'z_0 + D' = 0\\
\Leftrightarrow\ &M_0 \in (\alpha').
\end{aligned}$$

Vậy trường hợp này xảy ra khi và chỉ khi (α) và (α') trùng nhau.

?2 Hai mặt phẳng (α) và (α') vuông góc với nhau khi hai vectơ $\vec{n}(A\,;B\,;C)$ và $\vec{n'}(A'\,;B'\,;C')$ vuông góc với nhau, tức là $AA' + BB' + CC' = 0$.

5

a) (α) và (β) song song khi $\dfrac{2}{1} = \dfrac{-m}{-2} = \dfrac{10}{3m+1} \neq \dfrac{m+1}{-10}$. Dễ thấy rằng không có số m như thế.

b) Cũng không có m để (α) và (β) trùng nhau.

c) Từ a) và b) suy ra với mọi m, hai mặt phẳng (α) và (β) luôn luôn cắt nhau.

d) (α) và (β) vuông góc với nhau khi hai vectơ pháp tuyến của chúng vuông góc, tức là :

$$2 + 2m + 10(3m + 1) = 0 \text{ hay } m = -\frac{3}{8}.$$

6

Hai mặt phẳng đó song song với nhau. Bởi vậy, khoảng cách giữa chúng bằng khoảng cách từ một điểm M nào đó của mặt phẳng thứ nhất đến mặt phẳng thứ hai. Ta có thể lấy $M = (0 ; 0 ; 3)$, và khoảng cách cần tìm là :

$$d = \frac{|4.3 + 4|}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{16}{\sqrt{56}} = \frac{4\sqrt{14}}{7} \ .$$

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

15. a) *Cách 1*. Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1 ; -2 ; 4), \overrightarrow{MP} = (-2 ; 1 ; 3)$, suy ra

$$\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = (-10 ; -5 ; -5).$$

Mặt phẳng (MNP) đi qua điểm M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ cùng phương với vectơ $\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right]$, bởi vậy ta có thể lấy $\vec{n} = (2 ; 1 ; 1)$. Vậy mp(MNP) có phương trình :

$$2(x - 2) + y + (z + 1) = 0 \quad \text{hay } 2x + y + z - 3 = 0.$$

Cách 2. Phương trình mp(MNP) có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$. Toạ độ của các điểm M, N, P là nghiệm của phương trình đó nên :

$$\begin{cases} 2A - C + D = 0 & (1) \\ A - 2B + 3C + D = 0 & (2) \\ B + 2C + D = 0. & (3) \end{cases}$$

Khử D từ các phương trình trên (bằng cách lấy (1) trừ cho (2) và lấy (2) trừ cho (3)), ta có

$$\begin{cases} A + 2B - 4C = 0 \\ A - 3B + C = 0. \end{cases}$$

Khử A từ hai phương trình trên, ta được $5B - 5C = 0$ hay $B = C$ và do đó $A = 2C$, $D = -3C$. Ta được phương trình : $2Cx + Cy + Cz - 3C = 0$. Hiển nhiên $C \neq 0$ (vì nếu $C = 0$ thì $A = B = C = 0$) nên chia hai vế của phương trình cho C, ta được :

$$2x + y + z - 3 = 0.$$

b) *Cách 1*. Giả sử mặt phẳng (P) đi qua A, B và song song với Oz có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ thì $\vec{n}$ phải vuông góc với $\overrightarrow{AB}(4 ; 1 ; 2)$ và vuông góc với $\vec{k}(0 ; 0 ; 1)$, vậy có thể lấy

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{k}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1 ; -4 ; 0).$$

Ngoài ra, (P) đi qua điểm A nên phương trình của (P) là

$$1.(x - 1) - 4(y - 1) + 0 = 0 \text{ hay } x - 4y + 3 = 0.$$

Cách 2. Mặt phẳng (P) song song với Oz nên có phương trình :

$$A'x + B'y + D' = 0 \text{ với } D' \neq 0.$$

Mặt phẳng đó đi qua A và B nên toạ độ của A và B thoả mãn phương trình đó :

$$\begin{cases} A' + B' + D' = 0 \\ 5A' + 2B' + D' = 0 \end{cases} \Rightarrow 4A' + B' = 0.$$

Ta có thể lấy $A' = 1$, $B' = -4$ và do đó $D' = 3$ và được phương trình của (P) là

$$x - 4y + 3 = 0.$$

c) Mặt phẳng (P) cần tìm phải song song với mặt phẳng $x - 5y + z = 0$ nên hai mặt phẳng có cùng vectơ pháp tuyến là $(1 ; -5 ; 1)$. Ngoài ra, mp(P) phải đi qua điểm $(3 ; 2 ; -1)$ nên nó có phương trình là :

$$(x - 3) - 5(y - 2) + (z + 1) = 0 \text{ hay } x - 5y + z + 8 = 0.$$

d) Mặt phẳng (P) cần tìm phải vuông góc với mặt phẳng $x - y + z + 1 = 0$ nên vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (P) phải vuông góc với $\overrightarrow{n'} = (1 ; -1 ; 1)$; mp(P) lại đi qua hai điểm A, B nên $\vec{n}$ vuông góc với $\overrightarrow{AB} = (-1 ; -1 ; 1)$, vậy có thể lấy $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n'}\right] = (0 ; 2 ; 2)$. Phương trình của (P) là

$$2(y - 1) + 2(z - 1) = 0 \quad \text{hay} \quad y + z - 2 = 0.$$

e) Mặt phẳng đi qua $M(a\ ;\ b\ ;\ c)$, song song với mp(Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ nên có phương trình $1.(z-c)=0$ hay $z-c=0$.

Tương tự, mặt phẳng đi qua $M(a\ ;\ b\ ;\ c)$, song song với mp(Oyz) có phương trình $x-a=0$; mặt phẳng đi qua $M(a\ ;\ b\ ;\ c)$, song song với mp(Oxz) có phương trình $y-b=0$.

g) Giả sử $A=(a\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B=(0\ ;\ b\ ;\ 0)$ và $C=(0\ ;\ 0\ ;\ c)$. Vì $G(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\frac{a+0+0}{3}=1\ ;\ \frac{0+b+0}{3}=2\ ;\ \frac{0+0+c}{3}=3,$$

suy ra $a=3, b=6, c=9$.

Vậy phương trình (theo đoạn chắn) của mặt phẳng cần tìm là

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1.$$

h) Nếu mặt phẳng đi qua $H(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ và cắt các trục toạ độ tại A, B, C thì tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc, bởi vậy H là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $OH\perp$ mp(ABC). Vậy mp(ABC) đi qua H và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OH}(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ nên có phương trình :

$$2(x-2)+(y-1)+(z-1)=0 \qquad \text{hay} \qquad 2x+y+z-6=0.$$

16. a) Hai vectơ pháp tuyến không cùng phương nên hai mặt phẳng cắt nhau.

b) Hai vectơ pháp tuyến không cùng phương nên hai mặt phẳng cắt nhau.

c) $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{3}$ nên hai mặt phẳng song song.

d) Hai vectơ pháp tuyến không cùng phương nên hai mặt phẳng cắt nhau.

e) Các hệ số của hai phương trình tương ứng tỉ lệ nên hai mặt phẳng trùng nhau.

17. a) Hai mặt phẳng đã cho song song khi và chỉ khi $\frac{2}{m}=\frac{n}{2}=\frac{2}{-4}\neq\frac{3}{7}$.

Vậy $n=-1$, $m=-4$.

b) Hai mặt phẳng đã cho song song khi và chỉ khi $\frac{2}{1}=\frac{1}{n}=\frac{m}{2}\neq\frac{-2}{8}$.

Vậy $m=4$, $n=\frac{1}{2}$.

18. Hai mặt phẳng đã cho có các vectơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_1}(2\,;-m\,;3)$, $\overrightarrow{n_2}=(m+3\,;-2\,;5m+1)$. Suy ra

$$\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(-5m^2-m+6\,;-7m+7\,;m^2+3m-4).$$

Hai vectơ đó cùng phương khi và chỉ khi $\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=\vec{0}$, tức là :

$$\begin{cases}-5m^2-m+6=0\\-7m+7=0\\m^2+3m-4=0.\end{cases}$$

Hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $m=1$, khi đó hai mặt phẳng có phương trình là $2x-y+3z-5=0$ và $4x-2y+6z-10=0$ nên chúng trùng nhau. Vậy

a) Không có giá trị m nào để hai mặt phẳng đó song song ;

b) Khi $m=1$, hai mặt phẳng đó trùng nhau ;

c) Khi $m\neq 1$, hai mặt phẳng đó cắt nhau.

d) Hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$ hay :

$$2(m+3)+2m+3(5m+1)=0\Leftrightarrow 19m+9=0\Leftrightarrow m=-\frac{9}{19}.$$

19. a) Điểm $M(x\,;y\,;z)$ cách đều hai mặt phẳng đã cho khi và chỉ khi :

$$\frac{|2x-y+4z+5|}{\sqrt{4+1+16}}=\frac{|3x+5y-z-1|}{\sqrt{9+25+1}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}|2x-y+4z+5|=\sqrt{3}|3x+5y-z-1|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}(2x-y+4z+5)=\pm\sqrt{3}(3x+5y-z-1).$$

Vậy tập hợp các điểm M là hai mặt phẳng :

$$(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})x-(\sqrt{5}+5\sqrt{3})y+(4\sqrt{5}+\sqrt{3})z+5\sqrt{5}+\sqrt{3}=0,$$

$$(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})x-(\sqrt{5}-5\sqrt{3})y+(4\sqrt{5}-\sqrt{3})z+5\sqrt{5}-\sqrt{3}=0.$$

b) Tập hợp các điểm M là hai mặt phẳng có phương trình :

$$-4x+16y-20z-1=0\quad;\quad 32x-2y-8z-13=0.$$

c) Tập hợp các điểm M là một mặt phẳng có phương trình :

$$x + 2y + z + 2 = 0.$$

20. Hai mặt phẳng đã cho song song với nhau. Lấy điểm $M(x_0 ; y_0 ; z_0)$ nằm trên mặt phẳng thứ nhất, tức là $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ hay $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$, thì khoảng cách d giữa hai mặt phẳng bằng khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng thứ hai, tức là :

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D' - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

21. $M \in Oz$ nên $M = (0 ; 0 ; c)$.

a) Độ dài MA bằng khoảng cách từ M tới mặt phẳng đã cho nên

$$\sqrt{2^2 + 3^2 + (4-c)^2} = \frac{|c - 17|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}}$$

$$\Leftrightarrow 13 + (4 - c)^2 = \frac{(c - 17)^2}{14}.$$

Từ đó suy ra $c = 3$. Vậy $M = (0 ; 0 ; 3)$.

b) Điểm M cách đều hai mặt phẳng đã cho nên $\frac{|-c+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|c+5|}{\sqrt{3}}$ hay $c = -2$.

Vậy $M = (0 ; 0 ; -2)$.

22. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với các tia Ox, Oy, Oz lần lượt là các tia OA, OB, OC. Khi đó ta có $A = (a ; 0 ; 0)$, $B = (0 ; b ; 0)$, $C = (0 ; 0 ; c)$ với $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-a ; b ; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-a ; 0 ; c)$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2 > 0$. Vậy góc A của tam giác ABC là góc nhọn.

Chứng minh tương tự, ta có các góc B và C của tam giác đó cũng nhọn.

b) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, vậy nó có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left(\frac{1}{a} ; \frac{1}{b} ; \frac{1}{c}\right)$. Mặt phẳng (OBC) chính là mặt phẳng (Oyz) nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}(1 ; 0 ; 0)$. Gọi α là góc giữa mp(ABC) và mp(OBC) thì :

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{|\vec{n}.\vec{i}|}{|\vec{n}|.|\vec{i}|}\right)^2 = \frac{\dfrac{1}{a^2}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}$$

$$= \frac{b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

Tương tự, ta có

$$\cos^2\beta = \frac{c^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},$$

$$\cos^2\gamma = \frac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

Từ đó suy ra

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

23. Mặt cầu đã cho có tâm là $I(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ và có bán kính

$$R = \sqrt{1^2+2^2+3^2+2} = 4.$$

Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $4x + 3y - 12z + 1 = 0$ nên có phương trình :

$$4x + 3y - 12z + D = 0 \text{ với } D \neq 1.$$

Khoảng cách d từ I tới mp(P) là

$$d = \frac{|4+6-36+D|}{\sqrt{16+9+144}} = \frac{|-26+D|}{13}.$$

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu khi và chỉ khi $d = R$, hay :

$$\frac{|-26+D|}{13} = 4 \Leftrightarrow |-26+D| = 52 \Leftrightarrow -26 + D = \pm 52$$

$$\Leftrightarrow D = 78 \text{ hoặc } D = -26.$$

Vậy có hai mặt phẳng thoả mãn yêu cầu là

$$4x + 3y - 12z + 78 = 0$$

và

$$4x + 3y - 12z - 26 = 0.$$