§3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Biết cách viết phương trình tham số của đường thẳng và phương trình chính tắc của đường thẳng (nếu có).
2. Biết cách xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng khi biết phương trình của chúng.
3. Biết cách viết phương trình đường thẳng thoả mãn các điều kiện cho trước, chẳng hạn : đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng cho trước, đường thẳng đi qua một điểm cho trước và cắt hai đường thẳng chéo nhau cho trước, đường thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau cho trước, hình chiếu của một đường thẳng trên một mặt phẳng cho trước.
4. Biết tính góc và khoảng cách giữa các đối tượng : điểm, đường thẳng và mặt phẳng.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Trong chương trình không có khái niệm phương trình tổng quát của đường thẳng, SGK chỉ giới thiệu phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có). Để có thể viết phương trình tham số của đường thẳng, cần biết toạ độ của một điểm nào đó trên đường thẳng và một vectơ chỉ phương của đường thẳng. Đó là bài toán cơ bản mà học sinh cần nắm vững.

   Tuy nhiên, đường thẳng cũng có thể xác định như là giao tuyến của hai mặt phẳng. Bởi vậy học sinh thường gặp bài toán sau đây :

   "*Cho hai mặt phẳng cắt nhau* (α) *và* (β) *lần lượt có phương trình :*

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

   Hãy viết phương trình tham số của đường thẳng Δ *là giao tuyến của hai mặt phẳng đó.*"

   Thực chất của bài toán trên là việc chuyển từ phương trình tổng quát của đường thẳng sang phương trình tham số.

Vì không có khái niệm phương trình tổng quát của đường thẳng nên ta cần làm cho học sinh hiểu được bản chất của các cách giải bài toán trên như sau :

Cách 1. (α) và (β) có các vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}(A ; B ; C)$ và $\overrightarrow{n'}(A' ; B' ; C')$ nên Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ vuông góc với cả $\vec{n}$ và $\overrightarrow{n'}$. Vậy ta chọn $\vec{u}$ là vectơ cùng phương với $\left[\vec{n}, \overrightarrow{n'}\right]$.

Ngoài ra, để tìm toạ độ của một điểm nào đó trên Δ, ta chỉ cần lấy một nghiệm $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ nào đó của hệ :

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Vậy Δ chính là đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$.

Cách 2. Vì Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) nên Δ gồm những điểm có toạ độ thoả mãn hệ phương trình (*).

Vì hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau nên có ít nhất một trong ba định thức sau đây khác không

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}$$

Nếu định thức

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \neq 0$$

thì bằng cách đặt $z = t$ và từ hệ (*), ta tìm được x và y theo t, tức là ta có hệ :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = t. \end{cases}$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng Δ.

Cách 3. Tìm hai điểm M_1, M_2 thuộc Δ, tức là hai nghiệm phân biệt của hệ

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z = 0. \end{cases}$$

Khi đó Δ chính là đường thẳng đi qua M_1 và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

• Cần lưu ý học sinh là ta có thể chọn nhiều điểm khác nhau trên Δ làm điểm M_0 cho trước và nhiều vectơ chỉ phương (tỉ lệ với nhau) nên cùng một đường thẳng Δ có nhiều phương trình tham số khác nhau.

2. Chúng ta cần lưu ý cho học sinh các phương pháp xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng và các mặt phẳng.

Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng rất dễ nhận biết bằng cách nhìn vào phương trình của chúng, như đã nói ở §2.

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Để xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng, ta có thể xét vectơ chỉ phương của đường thẳng và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng. Nhưng nếu cần chỉ ra toạ độ giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng thì ta nên dùng cách giải hệ phương trình. Ví dụ, một đường thẳng Δ cho bởi phương trình tham số, tức là hệ ba phương trình bậc nhất biểu thị x, y, z theo t, còn mặt phẳng (α) cho bởi phương trình bậc nhất giữa ba ẩn x, y, z, thì bằng cách xét hệ bốn phương trình trên với bốn ẩn số x, y, z, t, ta có thể xác định được vị trí tương đối của Δ và (α) tuỳ theo hệ phương trình đó vô nghiệm, có nghiệm duy nhất hoặc có vô số nghiệm.

Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng thì nên dùng phương pháp vectơ, tức là xét bộ ba vectơ gồm hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng và vectơ thứ ba có điểm đầu và điểm cuối lần lượt nằm trên hai đường thẳng đó.

3. Để tính khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, SGK không trình bày công thức tổng quát mà chỉ nêu ra như một ứng dụng của tích vectơ với hi vọng học sinh có thể vận dụng không khó khăn lắm.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1

a) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (-2\,;1\,;2)$.

b) Với các giá trị $t = 0$, $t = 1$, $t = -2$, ta có các điểm tương ứng là

$$M_1(1\,;2\,;0),\ M_2(-1\,;3\,;2),\ M_3(5\,;0\,;-4).$$

c) Điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi có giá trị t thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x_0 = 1 - 2t \\ y_0 = 2 + t \\ z_0 = 2t. \end{cases}$$

Làm như vậy đối với các điểm A, B, C, ta có : điểm $A(3 ; 1 ; -2)$ thuộc d (ứng với $t = -1$), điểm $B(-3 ; 4 ; 2)$ không thuộc d, và điểm $C(0 ; 2{,}5 ; 1)$ thuộc d (ứng với $t = 0{,}5$).

2

a) Hai mặt phẳng (α) và (α') cắt nhau vì bộ ba số $(2 ; 2 ; 1)$ không tỉ lệ với bộ ba số $(2 ; -1 ; -1)$.

b) Đường thẳng d gồm các điểm $M(x; y; z)$ vừa thuộc mặt phẳng (α), vừa thuộc mặt phẳng (α') nên toạ độ của M là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x + 2y + z - 4 = 0 \\ 2x - y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

Dễ thấy điểm $M_0(-1 ; 3 ; 0)$ thuộc đường thẳng d.

$\overrightarrow{n_1} = (2 ; 2 ; 1)$ là vectơ pháp tuyến của (α)

$\overrightarrow{n_2} = (2 ;-1 ;-1)$ là vectơ pháp tuyến của (α').

Vậy $\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (-1 ; 4 ;-6)$ là một vectơ chỉ phương của d.

c) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(-1 ; 3 ; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(-1 ; 4 ; -6)$ nên có

phương trình tham số là : $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 + 4t \\ z = -6t, \end{cases}$

phương trình chính tắc là : $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{-6}$.

? Hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau khi hai vectơ $\vec{u}, \overrightarrow{u'}$ vuông góc với nhau, tức là $\vec{u}.\overrightarrow{u'} = 0$.

3

Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(-2\ ;\ -2\ ;\ 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$.

Vì $M = (4\ ;\ -3\ ;\ 2)$ nên $\overrightarrow{M_0M} = (6\ ; -1;\ 2)$ và $\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}\right] = (-3; 12\ ; 15)$.

Vậy khoảng cách cần tìm là

$$\frac{\sqrt{3^2 + 12^2 + 15^2}}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = 3\sqrt{3}.$$

4

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(0\ ;\ 1\ ;\ 6)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (1\ ; 2\ ; 3)$, đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(1\ ;\ -2\ ;\ 3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (1; 1; -1)$.

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = (1\ ;\ -3\ ;\ -3)$, $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-5\ ; 4\ ; -1)$, $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = -14$.

Vậy khoảng cách giữa d_1 và d_2 là :

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|} = \frac{14}{\sqrt{25 + 16 + 1}} = \frac{\sqrt{42}}{3}.$$

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

24. a) Trục Ox đi qua O và có vectơ chỉ phương $\vec{i}(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$

Tương tự, Oy có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0, \end{cases}$

Oz có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t. \end{cases}$

Các đường thẳng đó không có phương trình chính tắc.

b) Đường thẳng đi qua $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$, song song với trục Ox có vectơ chỉ phương $\vec{i}$ nên có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \\ z = z_0. \end{cases}$$

Tương tự, đường thẳng đi qua M_0, song song với Oy có phương trình là :

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + t \\ z = z_0, \end{cases}$$

đường thẳng đi qua M_0, song song với Oz có phương trình là :

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + t. \end{cases}$$

Các đường thẳng trên không có phương trình chính tắc.

c) Phương trình tham số : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = -1 + 5t. \end{cases}$

Phương trình chính tắc $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{5}$.

d) Phương trình tham số : $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t. \end{cases}$

Không có phương trình chính tắc.

e) Vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x - 5y + 4 = 0$ nên $\vec{u} = (2 ; -5 ; 0)$. Vậy đường thẳng có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 1. \end{cases}$$

Không có phương trình chính tắc.

g) Đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-1\,;-1\,;\,5)$ và đi qua $P(2\,;\,3\,;-1)$ nên có

phương trình tham số là $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t, \end{cases}$

phương trình chính tắc là $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{5}$.

25. a) Đường thẳng cần tìm có các phương trình :

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad \frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{2}.$$

b) Đường thẳng cần tìm có các phương trình :

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{3} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$$

26. Đường thẳng d có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

Mỗi điểm $M(x;\,y;\,z) \in d$ có hình chiếu trên mp(Oxy) là điểm $M'(x;\,y;\,0) \in d'$, d' là hình chiếu của d trên mp(Oxy). Vậy d' có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0. \end{cases}$$

Tương tự, ta có phương trình hình chiếu của d trên mp(Oxz), mp(Oyz) lần lượt là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

27. a) Điểm $M_0(0\,;\,8\,;\,3)$ nằm trên d. Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}(1;\,4;\,2)$.

b) Vectơ pháp tuyến của mp(P) là $\overrightarrow{n_P}(1;1;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với (P) thì vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (α) vuông góc với cả $\vec{u}$ và $\overrightarrow{n_P}$ nên ta có thể lấy $\vec{n} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{n_P}\right] = (2;1;-3)$. Ngoài ra, (α) đi qua d nên cũng đi qua điểm M_0. Vậy (α) có phương trình :

$$2(x-0)+(y-8)-3(z-3)=0 \quad \text{hay} \quad 2x+y-3z+1=0.$$

c) Vì d không vuông góc với (P) nên hình chiếu của d trên (P) là đường thẳng d'. Đường thẳng d' là giao tuyến của (α) và (P) nên d' có phương trình là :

$$\begin{cases} x = -8+4t \\ y = 15-5t \\ z = t. \end{cases}$$

28. a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1\ ;\ 7\ ;\ 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2\ ;1\ ;4)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(3;-1;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}(6\ ;-2\ ;1)$.

Từ đó ta có :

$$\overrightarrow{MM'} = (2;-8;-5)\ ;\ \left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right] = (9\ ;22\ ;-10) \neq \vec{0}$$

và $$\left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{MM'} = -108 \neq 0.$$

Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

b) Đường thẳng d đi qua điểm $M(0\ ;\ -3\ ;\ -3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1\ ;-4\ ;-3)$.

Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'} = (1\ ;-4\ ;-3)$.

Như vậy, d và d' có cùng vectơ chỉ phương, ngoài ra vì điểm $M(0\ ;\ -3\ ;\ -3)$ không nằm trên d' nên ta có $d' \,//\, d$.

29. Dễ thấy $A \notin d, A \notin d'$.

Cách 1. Đường thẳng d đi qua điểm $M(1\ ;\ 0\ ;\ 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2\ ;1\ ;-1)$. Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(0\ ;\ -1\ ;\ 2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}(1\ ;-2\ ;1)$.

Đường thẳng Δ cần tìm là giao tuyến của hai mặt phẳng : mp(A, d) và mp(A, d'). mp(A, d) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right] = (-3;\ 4;\ -2)$. Vì $\left[\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{u'}\right] = (2;\ 2;\ 2)$ nên mp(A, d') có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n'} = (1\ ;1\ ;1)$.

Vậy đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\left[\vec{n}, \vec{n'}\right] = (6\,;1\,;-7)$. Do đó Δ có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 7t. \end{cases}$$

Ta chú ý rằng $\vec{u}.\vec{n'} = 2 + 1 - 1 = 2 \neq 0$ nên d cắt mp(A, d'), do đó d cắt Δ. Tương tự, vì $\vec{u'}.\vec{n} = -3 - 8 - 2 = -13 \neq 0$ nên d' cắt mp(A, d), do đó d' cắt Δ. Vậy Δ là đường thẳng đi qua A, cắt cả d và d'.

Cách 2. mp(A, d) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(-3\,;4\,;-2)$ nên có phương trình là $3x - 4y + 2z - 9 = 0$. Toạ độ giao điểm B của đường thẳng d' và mp(A, d) thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \\ 3x - 4y + 2z - 9 = 0. \end{cases}$$

Suy ra $B = \left(\frac{1}{13}; -\frac{15}{13}; \frac{27}{13}\right)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua hai điểm A và B ; vì $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{12}{13}; -\frac{2}{13}; \frac{14}{13}\right)$ nên có thể lấy vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (-6\,; -1\,; 7)$. Vậy Δ có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + 7t. \end{cases}$$

Ta có Δ đi qua A và cắt d' tại B, ngoài ra Δ và d cùng nằm trong mp(A, d) và có các vectơ chỉ phương không cùng phương nên Δ cũng cắt d. Vậy Δ là đường thẳng cần tìm.

Cách 3. Lấy điểm $M(1 + 2t\,;t\,;3 - t)$ nằm trên d và điểm $M'(t'\,; -1 - 2t'\,;2 + t')$ nằm trên d'. Ta tìm giá trị của t và t' sao cho điểm $A(1\,;-1\,;1)$ nằm trên đường thẳng MM', tức là $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AM'}$ cùng phương.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (2t\,;1+t\,;2-t)$, $\overrightarrow{AM'} = \left(-1+t'\,;-2t'\,;1+t'\right)$. Do đó :

$$\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right] = \left(\begin{vmatrix}1+t & 2-t\\ -2t' & 1+t'\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2-t & 2t\\ 1+t' & -1+t'\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2t & 1+t\\ -1+t' & -2t'\end{vmatrix}\right)$$

$$= (1+t+5t'-tt'\,;-2-t+2t'-3tt'\,;1+t-t'-5tt').$$

Hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AM'}$ cùng phương khi và chỉ khi $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right] = \vec{0}$ hay :

$$\begin{cases}1+t+5t'-tt'=0\\ -2-t+2t'-3tt'=0\\ 1+t-t'-5tt'=0.\end{cases}$$

Khử số hạng tt' từ các phương trình trên, ta được hệ :

$$\begin{cases}5+4t+13t'=0\\ 4+4t+26t'=0,\end{cases}$$

suy ra $t = -\dfrac{3}{2};\ t' = \dfrac{1}{13}$. Khi đó $\overrightarrow{AM} = \left(-3\,;-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{7}{2}\right)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và M (do đó đi qua cả M') thì nó có vectơ chỉ phương là $2\overrightarrow{AM} = (-6\,;-1\,;7)$. Từ đó ta viết được phương trình đường thẳng cần tìm AM.

30. *Cách 1*. Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(0;4;-1)$. Ta viết các phương trình của d_2 và d_3 dưới dạng tham số :

$$d_2 : \begin{cases}x=1+t\\ y=-2+4t\\ z=2+3t\end{cases} \qquad d_3 : \begin{cases}x=-4+5t'\\ y=-7+9t'\\ z=t'.\end{cases}$$

Trên đường thẳng d_2 lấy điểm $M_2(1+t\,;-2+4t\,;2+3t)$ và trên đường thẳng d_3 lấy điểm $M_3\left(-4+5t'\,;-7+9t'\,;t'\right)$. Ta xác định các giá trị t và t' sao cho $\overrightarrow{M_2M_3}$ và $\overrightarrow{u_1}$ cùng phương.

Ta có $\qquad \overrightarrow{M_2M_3} = \left(-5+5t'-t\,;-5+9t'-4t\,;-2+t'-3t\right)$.

Hai vectơ $\overrightarrow{M_2M_3}$ và $\overrightarrow{u_1}$ cùng phương khi và chỉ khi :

$$\begin{cases}-5+5t'-t=0\\ \dfrac{-5+9t'-4t}{4} = \dfrac{-2+t'-3t}{-1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=0\\ t'=1.\end{cases}$$

Với các giá trị tìm được của t và t', ta có $M_2 = (1\ ;-2\ ;2)$ và $\overrightarrow{M_2M_3} = (0;4;-1)$.

Vậy đường thẳng Δ đi qua M_2 và M_3 có phương trình :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 - t. \end{cases}$$

Dễ thấy $M_2 \notin d_1$. Vậy Δ đúng là đường thẳng cần tìm.

Cách 2. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua d_2 và song song với d_1, phương trình mặt phẳng (β) đi qua d_3 và song song với d_1. Hai mặt phẳng đó cắt nhau theo giao tuyến Δ là đường thẳng cần tìm nếu Δ không trùng với d_1.

31. a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(8\ ;5\ ;8)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(1;2;-1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(3\ ;1\ ;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(-7\ ;2\ ;3)$.

Ta có : $\overrightarrow{M_2M_1} = (5;4;7)$, $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] = (8;4;16)$, do đó

$$\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_2M_1} = 168 \neq 0.$$

Vậy hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Có thể lấy vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là $\vec{n} = \frac{1}{4}\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] = (2;1;4)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng đi qua O với vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ là $2x + y + 4z = 0$. Dễ thấy M_1, M_2 không thuộc mặt phẳng này, vậy nó chính là mặt phẳng cần tìm.

c) Gọi khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là d, ta có :

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_2M_1}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|} = 2\sqrt{21}.$$

d) *Cách 1.* Ta có $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] = (8;4;16)$. Đường vuông góc chung Δ của d_1 và d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ vuông góc với cả $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ nên có thể lấy $\vec{u} = (2\ ;1\ ;4)$.

Vì Δ cắt d_1 nên ta có $mp(\Delta, d_1)$, đó là mặt phẳng đi qua M_1 và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_1}\right] = (-9 ; 6 ; 3)$. Vậy $mp(\Delta, d_1)$ có phương trình :

$$-9(x-8) + 6(y-5) + 3(z-8) = 0 \text{ hay } -3x + 2y + z + 6 = 0.$$

Vì Δ cắt d_2 nên ta có $mp(\Delta, d_2)$, đó là mặt phẳng đi qua M_2 và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-5 ; -34 ; 11)$. Vậy $mp(\Delta, d_2)$ có phương trình :

$$-5(x-3) - 34(y-1) + 11(z-1) = 0 \text{ hay } 5x + 34y - 11z - 38 = 0.$$

Đường vuông góc chung Δ là giao tuyến của $mp(\Delta, d_1)$ và $mp(\Delta, d_2)$ nên có phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -3 + 4t. \end{cases}$$

Cách 2. Giả sử PQ là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 với $P \in d_1$; $Q \in d_2$. Khi đó ta có các giá trị t và t' sao cho

$$P = (8 + t ; 5 + 2t ; 8 - t), \quad Q = (3 - 7t' ; 1 + 2t' ; 1 + 3t').$$

Như vậy ta có :

$$\overrightarrow{PQ} = (-5 - 7t' - t ; -4 + 2t' - 2t ; -7 + 3t' + t).$$

Vectơ $\overrightarrow{PQ}$ đồng thời vuông góc với hai vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 - 7t' - t + 2(-4 + 2t' - 2t) - (-7 + 3t' + t) = 0 \\ -7(-5 - 7t' - t) + 2(-4 + 2t' - 2t) + 3(-7 + 3t' + t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6t' - 6t = 6 \\ 62t' + 6t = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ t = -1. \end{cases}$$

Vậy $P = (7 ; 3 ; 9)$, $Q = (3 ; 1 ; 1)$ và do đó, đường vuông góc chung của d_1 và d_2 có phương trình :

$$\frac{x-3}{7-3} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-1}{9-1} \quad \text{hay} \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{4}.$$

32. a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2\,;3\,;5)$, mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2\,;1\,;1)$. Gọi φ là góc giữa d và (α) thì $0^{\circ} \le \varphi \le 90^{\circ}$ và

$$\sin\varphi = \frac{\left|\vec{u}\,.\,\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{|4+3+5|}{\sqrt{4+9+25}.\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{57}}.$$

b) Đưa phương trình của d về dạng tham số với tham số t rồi kết hợp với phương trình của (α), ta được $2(2+2t)+(-1+3t)+(1+5t)-8=0$, suy ra $t=\dfrac{1}{3}$ và được giao điểm là $I\left(\dfrac{8}{3}\,;0\,;\dfrac{8}{3}\right)$.

c) *Cách 1*. Gọi (β) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với (α) thì hình chiếu d' của d trên (α) là giao tuyến của (β) và (α). Bởi vậy, ta cần tìm phương trình của (β). Vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\beta}$ của (β) vuông góc với cả $\vec{u}$ và $\vec{n}$ nên ta chọn $\overrightarrow{n_\beta} = \left[\vec{u},\vec{n}\right] = (-2\,;8\,;-4)$. Ngoài ra, (β) đi qua d nên cũng đi qua điểm $A(2\,;-1\,;1)$. Do đó (β) có phương trình :

$$-2(x-2)+8(y+1)-4(z-1)=0 \text{ hay } -x+4y-2z+8=0.$$

Suy ra phương trình tham số của hình chiếu d' là :

$$\begin{cases} x = \dfrac{8}{3} - 2t \\ y = t \\ z = \dfrac{8}{3} + 3t. \end{cases}$$

Cách 2. Ta lấy một điểm A nằm trên d khác với I, chẳng hạn $A=(2;-1\,;1)$ và gọi $A'=(a\,;b\,;c)$ là hình chiếu của A trên (α). Toạ độ của A' xác định bởi hai điều kiện : A' nằm trên (α) và vectơ $\overrightarrow{AA'}=(a-2\,;b+1\,;c-1)$ cùng phương với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2\,;1\,;1)$ của (α).

Vậy ta có :

$$\begin{cases} 2a+b+c-8=0 \\ \dfrac{a-2}{2} = \dfrac{b+1}{1} = \dfrac{c-1}{1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+c-8=0 \\ a=2b+4 \\ c=b+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2b+4)+b+b+2-8=0 \\ a=2b+4 \\ c=b+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-\dfrac{1}{3} \\ a=\dfrac{10}{3} \\ c=\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Vậy $A'=\left(\dfrac{10}{3};\ -\dfrac{1}{3};\ \dfrac{5}{3}\right)$.

Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (α) chính là đường thẳng d' đi qua hai điểm I và A'.

Vì $$\overrightarrow{IA'}=\left(\dfrac{10}{3}-\dfrac{8}{3};-\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}-\dfrac{8}{3}\right)=\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3};-1\right)$$

nên có thể lấy vectơ chỉ phương của d' là $\overrightarrow{u'}=(2;-1;-3)$.

Vậy đường thẳng d' có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x=\dfrac{8}{3}+2t \\ y=-t \\ z=\dfrac{8}{3}-3t. \end{cases}$$

33. a) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ với tham số t và thay các giá trị x, y, z cho bởi phương trình đó vào phương trình của mp(P), ta được :

$$2(1+t)+3+2t-5=0, \text{ suy ra } t=0.$$

Vậy giao điểm của Δ và mp(P) là $A=(1;2;3)$.

b) *Cách 1.* Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ thì (Q) có vectơ pháp tuyến là vectơ chỉ phương của Δ nên có phương trình :

$$x-1+2(y-2)+2(z-3)=0 \quad \text{hay} \quad x+2y+2z-11=0.$$

Giao tuyến d của (P) và (Q) là đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và $d\perp\Delta$ (vì d nằm trong (Q) mà $\Delta\perp(Q)$). Suy ra phương trình tham số của d là :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}t \\ y = t \\ z = \dfrac{17}{3} - \dfrac{4}{3}t. \end{cases}$$

Cách 2. Gọi d là đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và vuông góc với Δ. Khi đó, vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}$ của d phải vuông góc với vectơ chỉ phương $\vec{u}(1; 2; 2)$ của Δ, đồng thời vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2; 0; 1)$ của (P), nên ta chọn : $\overrightarrow{u'} = [\vec{u}, \vec{n}] = (2 ; 3 ; -4)$.

Vậy đường thẳng d có phương trình chính tắc :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-4}.$$

34. a) *Cách 1*. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(-2 ; 1 ; -1)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1 ; 2 ; -2)$. Ta có $\overrightarrow{M_0M} = (4 ; 2 ; 2)$, $\left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M}\right] = (8 ; -10 ; -6)$.

Vậy khoảng cách cần tìm là

$$d = \frac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\sqrt{8^2 + 10^2 + 6^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

Cách 2. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua $M(2 ; 3 ; 1)$ và vuông góc với Δ thì (α) có vectơ pháp tuyến $(1 ; 2 ; -2)$. Vậy (α) có phương trình :

$$x - 2 + 2(y-3) - 2(z-1) = 0 \quad \text{hay} \quad x + 2y - 2z - 6 = 0.$$

Từ đó, ta có thể tìm được toạ độ giao điểm H của (α) và Δ là :

$$H\left(-\frac{14}{9} ; \frac{17}{9} ; -\frac{17}{9}\right).$$

Do đó $\quad d(M, \Delta) = MH = \sqrt{\left(\dfrac{32}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{10}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{26}{9}\right)^2} = \dfrac{10\sqrt{2}}{3}.$

b) Ta có $\quad \overrightarrow{M_0N} = \left(\dfrac{5}{2} ; 3 ; -\dfrac{1}{4}\right),$

$$\left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0N}\right] = \left(\frac{5}{2} ; -\frac{7}{2} ; -17\right).$$

Vậy khoảng cách cần tìm là

$$d = \frac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0N}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 17^2}}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2870}}{14}.$$

35. a) *Cách 1.* Đường thẳng d đi qua điểm $M_1(1 ; -1 ; 1)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(1 ; -1 ; 0)$. Đường thẳng d' đi qua điểm $M_2(2 ; -2 ; 3)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(-1 ; 1 ; 0)$. Vì $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương nhưng $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương với $\overrightarrow{M_1M_2} = (1 ; -1 ; 2)$ nên hai đường thẳng đó song song.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng đó bằng khoảng cách từ M_1 tới d' và bằng

$$\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = 2.$$

Cách 2. Dễ nhận thấy rằng d và d' song song với nhau. Bởi vậy, khoảng cách giữa hai đường thẳng đó bằng khoảng cách từ điểm $M(1 ; -1 ; 1)$ (nằm trên d) tới đường thẳng d'.

Giả sử H là hình chiếu vuông góc của M trên d' thì H có toạ độ :

$H = (2 - 3t ; -2 + 3t ; 3)$ và $\overrightarrow{MH}$ vuông góc với vectơ chỉ phương $\vec{u}(-1 ; 1 ; 0)$ của d'.

Vì $\overrightarrow{MH} = (1 - 3t ; -1 + 3t ; 2)$ nên $-(1 - 3t) + (-1 + 3t) = 0$ hay $t = \frac{1}{3}$.

Suy ra $\overrightarrow{MH} = (0 ; 0 ; 2)$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng d và d' là $MH = 2$.

b) Lấy điểm $M \in d, M' \in d'$ thì

$$M = (-t ; 4 + t ; -1 - 2t),$$

$$M' = (-t' ; 2 + 3t' ; -4 + 3t').$$

Suy ra

$$\overrightarrow{MM'} = (-t' + t ; -2 + 3t' - t ; -3 + 3t' + 2t).$$

MM' là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d, d' khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{MM'}.\vec{u'} = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' - t - 2 + 3t' - t + 6 - 6t' - 4t = 0 \\ t' - t - 6 + 9t' - 3t - 9 + 9t' + 6t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' + 3t = 2 \\ 19t' + 2t = 15. \end{cases}$$

Từ đó ta có $\quad t' = \dfrac{41}{55}, t = \dfrac{23}{55}$

và $\quad \overrightarrow{MM'} = \left(\dfrac{-18}{55} ; \dfrac{-10}{55} ; \dfrac{4}{55}\right).$

Khoảng cách giữa d và d' là

$$MM' = \sqrt{\left(\frac{-18}{55}\right)^2 + \left(\frac{-10}{55}\right)^2 + \left(\frac{4}{55}\right)^2} = \frac{2\sqrt{110}}{55}.$$