§4 MẶT NÓN, HÌNH NÓN VÀ KHỐI NÓN

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Hiểu được định nghĩa của mặt nón, phân biệt được ba khái niệm : mặt nón, hình nón và khối nón. Xác định được giao của mặt nón với một mặt phẳng vuông góc với trục hoặc đi qua đỉnh của mặt nón, hình nón.
2. Nhớ công thức tính thể tích của khối nón, diện tích xung quanh của hình nón và vận dụng vào các bài tập.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Mặt nón dưới dạng tổng quát có thể định nghĩa như sau : Cho một đường (L) nằm trong mặt phẳng (P) và một điểm O không nằm trên (P). Tập hợp gồm điểm O và các điểm M sao cho đường thẳng OM cắt (L) được gọi là một mặt nón đỉnh O và có đường chuẩn là (L). Các đường thẳng OM nói trên được gọi là các đường sinh của mặt nón đó.

   Khi (L) là đường tròn và O thuộc trục của đường tròn thì mặt nón trở thành mặt nón tròn xoay. Vậy có thể có nhiều cách định nghĩa mặt nón tròn xoay. Ví dụ :

   + Mặt nón tròn xoay là hình tạo bởi các tiếp tuyến của mặt cầu cho trước và đi qua một điểm cho trước nằm ngoài mặt cầu

   + Mặt nón tròn xoay là hình gồm tất cả các đường thẳng đi qua một điểm O cố định và góc giữa mỗi đường thẳng đó và một đường thẳng cố định bằng α không đổi $(0^o < \alpha < 90^o)$.

   + Mặt nón tròn xoay là tập hợp gồm điểm O nằm trên một đường thẳng cố định Δ và các điểm M khác O sao cho góc giữa OM và Δ bằng α cho trước $(0^o < \alpha < 90^o)$.

+ Mặt nón tròn xoay là mặt tròn xoay sinh bởi một đường thẳng d khi quay quanh đường thẳng cố định Δ cắt d nhưng không vuông góc với d.

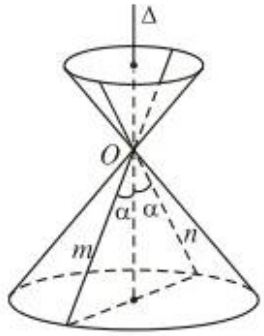
SGK đã dùng định nghĩa cuối cùng vì chúng tôi cho là đơn giản nhất sau khi có định nghĩa mặt tròn xoay một cách tổng quát.

2. Nội dung kiến thức của bài học không có gì khó. Tuy nhiên, cần làm cho học sinh phân biệt giữa mặt nón, hình nón và khối nón, hiểu rõ khái niệm về trục, đường sinh và bán kính đáy của hình nón.

3. Cũng giống như khối trụ, SGK có nói đến định nghĩa về thể tích và diện tích xung quanh của khối nón và suy ra các công thức mà học sinh phải công nhận ở lớp 9.

III. TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

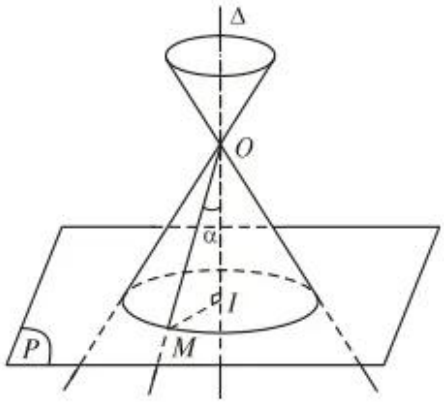
$\boxed{?1}$ a) Giả sử mp(P) đi qua trục Δ của mặt nón $\mathfrak{N}$ (h.49). Trong (P) có hai đường thẳng m, n đi qua O và góc giữa Δ với m, n cùng bằng α (giả sử góc ở đỉnh của mặt nón bằng 2α). Khi đó, m và n là hai đường sinh của mặt nón $\mathfrak{N}$. Vậy mp(P) cắt mặt nón $\mathfrak{N}$ theo hai đường sinh m và n đối xứng với nhau qua Δ.



Hình 49

b) Giả sử mp(P) vuông góc với Δ tại điểm I (h.50). Mỗi đường sinh của mặt nón cắt (P) tại một điểm M sao cho $IM = OI.\tan\alpha$. Suy ra M nằm trên đường tròn tâm I, bán kính $R = OI.\tan\alpha$ và nằm trong (P). Vậy mp(P) cắt mặt nón theo đường tròn đó.

Nếu cắt mặt nón bởi mặt phẳng vuông góc với trục tại O thì ta được giao là điểm O.



Hình 50

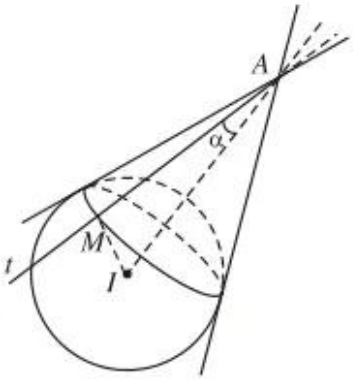
$\boxed{?2}$ Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục, ta được một tam giác cân OAB với đáy là đường kính AB của đường tròn đáy.

IV. TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

17. a) Hình nón.

b) Khối nón.

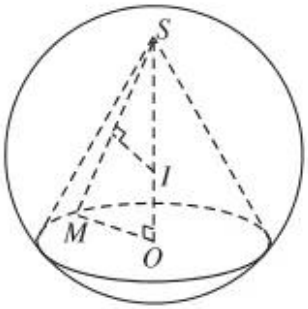
18. (h.51) Giả sử At là một tiếp tuyến của mặt cầu $S(I\ ;\ R)$ với tiếp điểm là M. Khi đó, nếu gọi Δ là đường thẳng AI và α là góc giữa đường thẳng At và Δ thì $\alpha = \widehat{MAI}$. Ta có $\sin\alpha = \dfrac{MI}{IA} = \dfrac{R}{IA}$, suy ra góc α không đổi. Vậy At là đường sinh của mặt nón $\mathfrak{N}$ có đỉnh A, trục Δ và góc ở đỉnh bằng 2α.



Hình 51

19. a) Giả sử hình nón $\mathfrak{N}$ có đỉnh S và đường tròn đáy là $(O\ ;\ r)$ (h.52). Lấy điểm M cố định trên $(O\ ;\ r)$ thì tam giác SOM vuông ở O. Điểm I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình nón khi và chỉ khi I nằm trên SO và cách đều hai điểm S, M. Vậy I là giao điểm của SO và mặt phẳng trung trực của SM nên nó xác định duy nhất.

Mặt cầu tâm I, bán kính $R = IS$ là mặt cầu ngoại tiếp duy nhất.



Hình 52

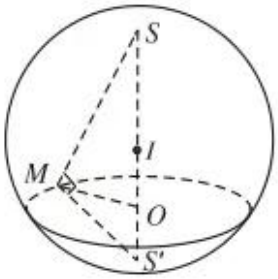
b) Gọi SS' là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình nón $(SS' > h)$ (h.53). Tam giác SMS' vuông tại M, có đường cao MO nên :

$$MO^2 = OS.OS' \Rightarrow r^2 = h(SS' - h).$$

Suy ra $SS' = \dfrac{r^2}{h} + h = \dfrac{r^2 + h^2}{h}$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón là

$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h}.$$



Hình 53

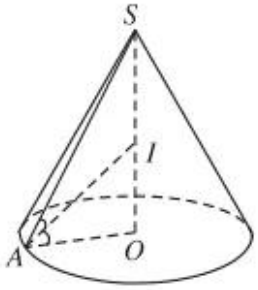
c) (h.53) Nếu hình nón có chiều cao h, bán kính đáy là r nội tiếp mặt cầu bán kính R thì theo câu b), ta có hệ thức $r^2 = h(2R - h)$.

Vậy $$r = \sqrt{h(2R - h)}.$$

Độ dài đường sinh là $l = SM = \sqrt{SS'.SO} = \sqrt{2R.h}$. Từ đó suy ra :

$$S_{xq} = \pi rl = \pi\sqrt{h(2R-h)}.\sqrt{2Rh} = \pi h\sqrt{2R(2R-h)}.$$

20. a) Giả sử hình nón có đỉnh S và có đáy là đường tròn $C(O\ ;\ r)$ (h.54).



Hình 54

Nếu I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình nón thì I phải nằm trên SO. Thật vậy, nếu I không thuộc SO, ta gọi I' là giao điểm của SI và mặt phẳng đáy của hình nón. Mặt phẳng $(SI'O)$ cắt hình nón theo tam giác cân SAB. Điểm I không nằm trên đường phân giác SO của góc ASB nhưng lại cách đều SA, SB, vô lí.

Lấy điểm A cố định trên đường tròn đáy và gọi I là điểm nằm trên SO sao cho AI là phân giác của góc SAO. Điểm I như vậy hoàn toàn xác định và là tâm của mặt cầu nội tiếp hình nón, bán kính của mặt cầu đó là $R = IO$.

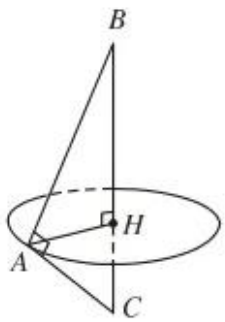
b) Ta có $SA = \sqrt{OS^2 + OA^2} = \sqrt{h^2 + r^2}$.

Theo tính chất đường phân giác, ta có :

$$\frac{IO}{IS} = \frac{OA}{SA} \Rightarrow \frac{IO}{IO + IS} = \frac{OA}{OA + SA} \Rightarrow \frac{IO}{h} = \frac{r}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}.$$

Vậy bán kính mặt cầu nội tiếp là : $R = IO = \dfrac{rh}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}$.

21. Gọi $\mathscr{H}$ là hình tạo bởi tam giác ABC (kể cả các điểm trong) khi quay quanh đường thẳng BC (h.55). Nếu gọi AH là đường cao của tam giác ABC thì các tam giác BAH và CAH khi quay quanh BC lần lượt tạo thành hai khối nón $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích hai khối nón đó, ta có thể tích V của $\mathscr{H}$ là



Hình 55

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi AH^2.BH + \frac{1}{3}\pi AH^2.CH$$

$$= \frac{1}{3}\pi AH^2.BC = \frac{1}{3}\pi\frac{b^2c^2}{b^2 + c^2}\sqrt{b^2 + c^2} = \frac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}.$$