§4 THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh hiểu được khái niệm thể tích của khối đa diện, các công thức tính thể tích của một số khối đa diện đơn giản. Từ đó, học sinh có thể vận dụng để tính thể tích của các khối đa diện phức tạp hơn hoặc để giải một số bài toán hình học.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

Lí thuyết về thể tích của các khối đa diện khá phức tạp, không thể trình bày một cách chặt chẽ và đầy đủ cho học sinh phổ thông.

Sau đây chúng tôi xin trình bày sơ lược về lí thuyết đó :

a) *Định nghĩa.* Gọi Ω là tập hợp các khối đa diện trong không gian. Hàm số $V : \Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là *hàm thể tích* nếu nó thoả mãn các tính chất sau đây :

i) Với mọi khối đa diện $\mathscr{H}$, ta có $V(\mathscr{H}) > 0$.

ii) Nếu hai khối đa diện $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ bằng nhau thì $V(\mathscr{H}) = V(\mathscr{H}')$.

iii) Nếu khối đa diện $\mathscr{H}$ được phân chia thành hai khối đa diện $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$ thì $V(\mathscr{H}) = V(\mathscr{H}_1) + V(\mathscr{H}_2)$.

iv) Nếu $\mathscr{C}$ là khối lập phương có cạnh bằng 1 thì $V(\mathscr{C}) = 1$.

b) *Định nghĩa*. Nếu hàm thể tích V tồn tại và duy nhất thì giá trị $V(\mathscr{H})$ được gọi là *thể tích của khối đa diện $\mathscr{H}$.*

c) Sau đây, tạm thời giả thiết rằng hàm thể tích V tồn tại (điều này được chứng minh sau), ta đi tìm công thức tính thể tích khối lăng trụ và khối chóp. Ta có :

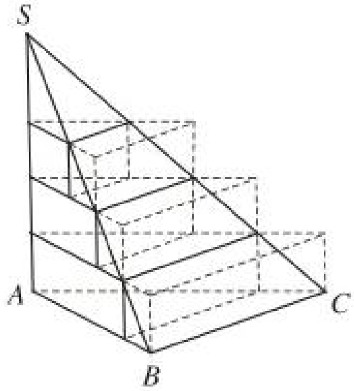
+ Thể tích V của khối hộp chữ nhật với ba kích thước a, b, c là $V = abc$. (Công thức này hiển nhiên đúng khi a, b, c là những số nguyên, khi chúng là số thực bất kì, ta phải dùng đến phép tính về giới hạn).

+ Thể tích của khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông bằng Bh, trong đó B là diện tích đáy của lăng trụ và h là chiều cao của lăng trụ. (Bằng cách ghép hình lăng trụ đứng như thế với một khối lăng trụ bằng nó sao cho ta được một khối hộp chữ nhật, ta suy ra điều phải chứng minh).

+ Thể tích của khối lăng trụ đứng bất kì bằng Bh, trong đó B là diện tích đáy và h là chiều cao của lăng trụ. (Chứng minh bằng cách chia hình lăng trụ đứng đã cho thành các hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông. Muốn vậy ta chia đáy hình lăng trụ đã cho thành các tam giác, và mỗi tam giác chia thành hai tam giác vuông).

+ Thể tích của khối chóp tam giác bằng $\frac{1}{3}Bh$ với B là diện tích đáy, h là chiều cao.

Chứng minh (h.13). Trước hết, ta xét khối đa diện $\mathscr{H}$ là hình chóp tam giác $S.ABC$ có diện tích đáy ABC là B và có đường cao là một trong các cạnh bên, chẳng hạn đó là cạnh $SA = h$. Chia đoạn thẳng SA thành n phần bằng nhau bởi các điểm $S \equiv A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n \equiv A$, và qua các điểm A_i vẽ các mặt phẳng song song với mp(ABC), ta được các thiết diện là các tam giác $A_iB_iC_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$). Dễ thấy rằng diện tích các tam giác đó là :



Hình 13

$$B_i = \frac{i^2}{n^2}B.$$

Ta dùng các kí hiệu :

• $\mathscr{H}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) là phần của $\mathscr{H}$ nằm giữa hai mặt phẳng : $(A_iB_iC_i)$ và $(A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1})$, tức là khối chóp cụt $A_iB_iC_iA_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}$ còn $\mathscr{H}_0$ là khối chóp $S.A_1B_1C_1$. Ghép các khối $\mathscr{H}_i$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$), ta được khối đa diện $\mathscr{H}$.

• $\mathscr{H}_i^0$ là khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác $A_iB_iC_i$ và một cạnh bên là A_iA_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, n-1$). Ghép các khối đa diện $\mathscr{H}_i^0$ với nhau, ta được khối đa diện $\mathscr{H}^0$.

• $\mathscr{H}_i^1$ là khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}$ và một cạnh bên là A_iA_{i+1} ($i = 0, \ldots, n-1$). Ghép các khối đa diện $\mathscr{H}_i^1$, ta được khối đa diện $\mathscr{H}^1$.

Với các kí hiệu như trên, ta dễ dàng suy ra : $\mathscr{H}^0 \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{H}^1$, và do đó, từ các tính chất của hàm thể tích V, ta suy ra :

$$V(\mathscr{H}^0) \leq V(\mathscr{H}) \leq V(\mathscr{H}^1). \qquad (*)$$

Áp dụng công thức về thể tích của khối lăng trụ đứng, ta có :

$$V(\mathscr{H}_i^0) = B_i.\frac{h}{n} = \frac{i^2}{n^3}Bh, \text{ và do đó}$$

$$V(\mathscr{H}^0) = \sum_{i=1}^{n-1} V(\mathscr{H}_i^0) = \frac{1}{n^3}Bh\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3}Bh\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{1}{3}Bh\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$

Tương tự ta có :

$$V(\mathscr{H}^1) = \sum_{i=0}^{n-1} V(\mathscr{H}_i^1) = \frac{1}{n^3}Bh\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}Bh\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

Như vậy, bất đẳng thức (*) trở thành :

$$\frac{1}{3}Bh\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \leq V(\mathscr{H}) \leq \frac{1}{3}Bh\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

Từ đó, khi cho n tiến tới vô cùng, ta suy ra $V(\mathscr{H}) = \frac{1}{3}Bh$.

Bây giờ, nếu $\mathscr{H}$ là khối chóp bất kì $S.ABC$. Kẻ đường cao SI của khối chóp, ta được ba khối chóp $S.IAB$, $S.IBC$ và $S.ICA$ đều có cạnh bên SI là đường cao. Từ đó áp dụng kết quả trên, ta suy ra điều phải chứng minh.

+ Thể tích của khối chóp bất kì bằng $\frac{1}{3}Bh$, với B là diện tích đáy, h là chiều cao. (Chỉ cần phân chia khối chóp bất kì thành các khối chóp tam giác và áp dụng kết quả trên).

+ Thể tích của khối lăng trụ bằng diện tích đáy nhân với chiều cao (làm như trong SGK).

Từ những công thức để tính thể tích trên đây, ta suy ra rằng nếu hàm thể tích V tồn tại thì nó là duy nhất.

Chúng ta lưu ý rằng SGK trình bày phần này đúng theo trình tự trên, tuy nhiên có bỏ qua những chứng minh phải dùng tới giới hạn.

c) Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh sự tồn tại của hàm thể tích V. Trong SGK, ta không trình bày vấn đề này vì quá khó.

Chúng ta bắt đầu bằng cách xây dựng một hàm số $V : \Omega \to \mathbb{R}$ như sau :

+ Nếu khối đa diện $\mathscr{H}$ là một hình tứ diện thì ta lấy $V(\mathscr{H})$ bằng $\frac{1}{3}$ tích số của diện tích một mặt nào đó của tứ diện và chiều cao tương ứng. Bằng cách dùng tích hỗn tạp của ba vectơ, ta có thể chứng minh rằng giá trị $V(\mathscr{H})$ không phụ thuộc việc chọn mặt của hình tứ diện để lấy diện tích.

+ Nếu $\mathscr{H}$ là một khối đa diện tuỳ ý, ta phân chia nó thành các khối tứ diện $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2, \ldots, \mathscr{H}_n$. Khi đó ta đặt $V(\mathscr{H}) = V(\mathscr{H}_1) + V(\mathscr{H}_2) + \ldots + V(\mathscr{H}_n)$.

Để định nghĩa trên hợp lí, ta phải chứng minh rằng giá trị $V(\mathscr{H})$ xác định như trên không phụ thuộc vào cách phân chia khối đa diện $\mathscr{H}$ thành các khối tứ diện. Chứng minh đó khá dài dòng, chúng tôi trình bày sơ lược như sau, bỏ qua các chi tiết tuy hiển nhiên nhưng chứng minh chặt chẽ thì không phải dễ : Giả sử khối đa diện $\mathscr{H}$ có hai cách phân chia : cách thứ nhất chia thành các tứ diện Δ_i^1, $i = 1, 2, \ldots, n$, cách thứ hai chia thành các tứ diện Δ_j^2, $j = 1, 2, \ldots, m$. Nếu với i và j nào đó, hai tứ diện Δ_i^1 và Δ_j^2

có điểm trong chung thì $\Delta_i^1 \cap \Delta_j^2$ là một khối đa diện lồi (có nhiều nhất 8 mặt). Ta phân chia khối đa diện lồi ấy thành các hình tứ diện Δ_k^*. Làm như vậy đối với mọi cặp chỉ số (i, j), ta được cách phân chia thứ ba của $\mathscr{H}$ thành các tứ diện Δ_k^*, $k = 1, 2, \ldots, p$, có tính chất : Mỗi một Δ_i^1 (hoặc Δ_j^2) đều được phân chia thành một số các Δ_k^* nào đó. Từ đó, theo định nghĩa của hàm số V đối với các khối đa diện, ta suy ra :

$$\sum_{i=1}^{n} V(\Delta_i^1) = \sum_{k=1}^{p} V(\Delta_k^*) = \sum_{j=1}^{m} V(\Delta_j^2).$$

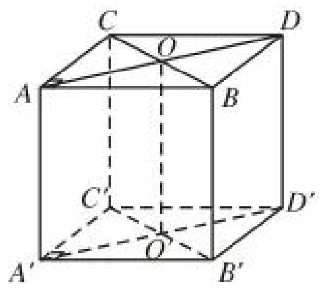
Như vậy, ta có một hàm số $V : \Omega \to \mathbb{R}$. Dễ chứng minh rằng hàm số đó chính là hàm thể tích.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1

Cách 1. (h.14) Giả sử $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ đã cho. Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Khi đó, phép đối xứng qua đường thẳng OO' biến khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành khối lăng trụ $DCB.D'C'B'$.

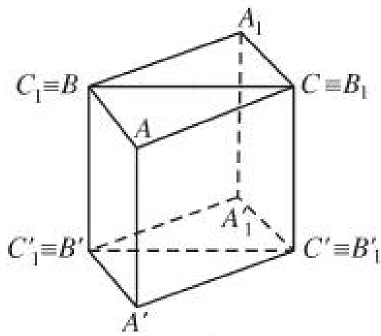
Khối hộp chữ nhật $ABDC.A'B'D'C'$ (với các kích thước a, b, h) có thể tích gấp đôi thể tích khối lăng trụ đã cho. Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2}abh$.



Hình 14

Cách 2. (h.15) Ghép khối lăng trụ đã cho $ABC.A'B'C'$ với khối lăng trụ $A_1B_1C_1.A'_1B'_1C'_1$ bằng nó sao cho $B_1 \equiv C$, $C_1 \equiv B$, $B'_1 \equiv C'$, $C'_1 \equiv B'$, $A_1 \in (ABC)$, $A'_1 \in (A'B'C')$. Khi đó ta được hình hộp chữ nhật $ABA_1C.A'B'A'_1C'$ có thể tích gấp đôi thể tích khối lăng trụ đã cho.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2}abh$.

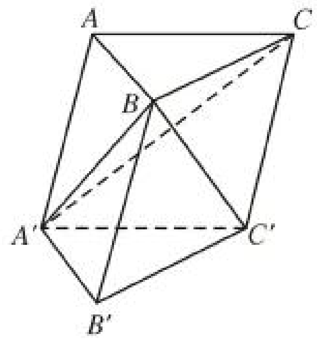


Hình 15

2

a) Ba khối tứ diện đó là : $A'ABC$, $BA'B'C'$ và $A'BCC'$ (h.16).

b) Hai khối tứ diện $A'ABC$ và $BA'B'C'$ là hai khối chóp $A'.ABC$ và $B.A'B'C'$ có hai mặt đáy bằng nhau và hai chiều cao bằng nhau (đều bằng chiều cao h của khối lăng trụ) nên chúng có thể tích bằng nhau.



Hình 16

Hai khối tứ diện $BA'B'C'$ và $A'BCC'$ là hai khối chóp $A'.BB'C'$ và $A'.BCC'$ có diện tích đáy bằng nhau và chiều cao bằng nhau (bằng khoảng cách từ A' tới mp$(BCC'B')$).

Tóm lại thể tích ba khối tứ diện nói trên bằng nhau.

c) Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được phân chia thành ba khối tứ diện có thể tích bằng nhau $A'ABC$, $BA'B'C'$ và $A'BCC'$. Suy ra thể tích khối lăng trụ bằng ba lần thể tích khối chóp $A'.ABC$:

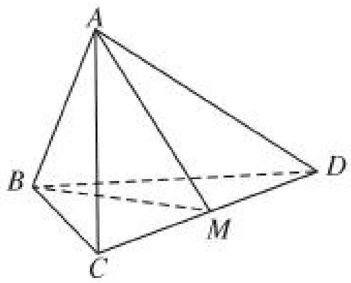
$$V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A'.ABC} = 3.\frac{1}{3}.S_{ABC}.h = S.h.$$

Vậy thể tích khối lăng trụ tam giác bằng tích số của diện tích đáy và chiều cao.

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

15. a) Không đổi. b) Có thể thay đổi. c) Không đổi.

16. (h.17) Xét khối tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M nằm giữa C và D sao cho $CM = kMD$. Khi đó, khối tứ diện $ABCD$ được phân chia thành hai khối tứ diện $ABCM$ và $ABMD$.

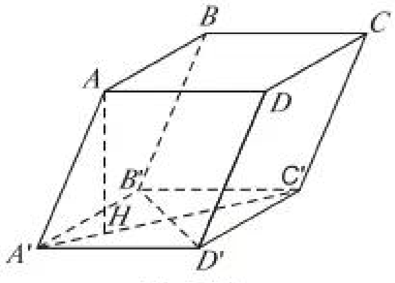


Hình 17

Rõ ràng $V_{ABCM} = k.V_{ABMD}$.

17. (h.18) Vì $AA'B'D'$ là tứ diện đều nên đường cao AH của nó có chân H là tâm của tam giác đều $A'B'D'$. Suy ra

$$A'H = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



Hình 18

Dễ thấy đáy $A'B'C'D'$ là hình thoi có góc $B'A'D'$ bằng 60^{o} nên :

$$S_{A'B'C'D'} = A'B'.A'D'\sin 60^{o} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

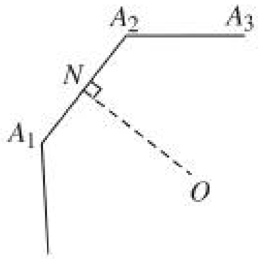
Vậy thể tích khối hộp đã cho là :

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

18. Gọi $A_1A_2...A_n$ là đáy của khối lăng trụ đều và O là tâm của đa giác đều $A_1A_2....A_n$ (h.19).

Kẻ $ON \perp A_1A_2$, ta có :

$$ON = A_1N\cot\widehat{NOA_1} = \frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}.$$



Hình 19

Vậy diện tích đáy của khối lăng trụ đều là :

$$S = n.S_{OA_1A_2} = n.\frac{1}{2}A_1A_2.ON = \frac{1}{4}na^2\cot\frac{\pi}{n}.$$

Vì lăng trụ đã cho là lăng trụ đều nên chiều cao của nó bằng cạnh bên, tức bằng a, do đó thể tích của khối lăng trụ là $V = \frac{1}{4}na^3\cot\frac{\pi}{n}$.

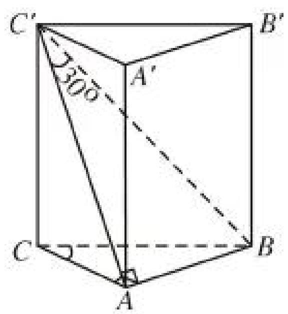
19. (h.20)

a) Ta có $BA \perp AC$, $BA \perp AA'$ nên $BA \perp (ACC'A')$.

Vậy AC' là hình chiếu của BC' trên mp$(ACC'A')$.

Theo giả thiết, góc $BC'A$ bằng 30^{o} nên

$$AC' = AB\cot 30^{o} = AC\tan 60^{o}\cot 30^{o}$$
$$= b\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3b.$$



Hình 20

b) Ta có

$$CC'^2 = AC'^2 - AC^2 = 9b^2 - b^2 = 8b^2.$$

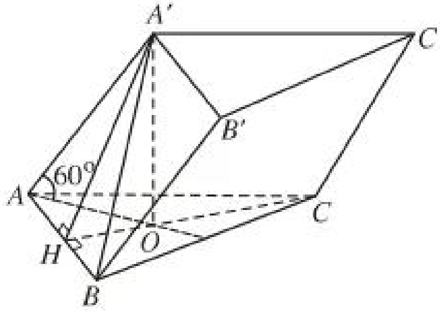
Do đó $CC' = 2b\sqrt{2}$. Vậy thể tích của khối lăng trụ là :

$$V = S.h = \frac{1}{2}AB.AC.CC'$$

$$= \frac{1}{2}b\sqrt{3}.b.2b\sqrt{2} = b^3\sqrt{6}.$$

20. (h.21)

a) Gọi O là tâm của tam giác đều ABC. Vì $A'A = A'B = A'C$ nên $A'O \perp mp(ABC)$. Vậy $\widehat{A'AO} = 60^o$.



Hình 21

Từ đó ta có :

$$A'O = AO\tan 60^o = AO\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a.$$

Vậy thể tích cần tìm là :

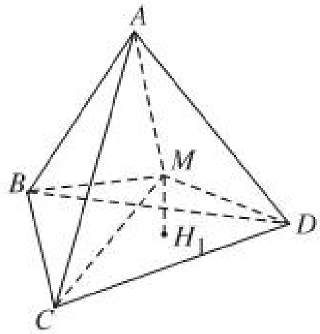
$$V = S_{ABC}.A'O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

b) Vì $BC \perp AO$ nên $BC \perp AA'$ hay $BC \perp BB'$. Vậy $BB'C'C$ là hình chữ nhật.

c) Gọi H là trung điểm của AB. Ta có

$$S_{xq} = 2S_{AA'B'B} + S_{BB'C'C} = 2A'H.AB + BB'.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{13} + 2\right).$$

21. (h.22) Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là hình chiếu của điểm M trên các mặt phẳng (BCD), (ACD), (ABD), (ABC). Khi đó MH_1, MH_2, MH_3, MH_4 lần lượt là khoảng cách từ điểm M tới các mặt phẳng đó. Các mặt bên của tứ diện đều có cùng diện tích, ta kí hiệu các diện tích đó là S và gọi h là chiều cao của tứ diện đều. Ta có :



Hình 22

$$V_{MBCD} + V_{MACD} + V_{MABD} + V_{MABC} = V_{ABCD}$$

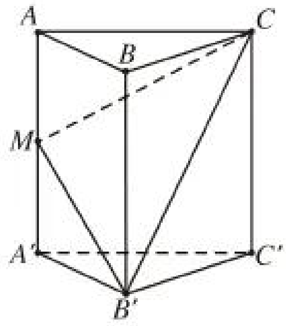
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}S.MH_1 + \frac{1}{3}S.MH_2 + \frac{1}{3}S.MH_3 + \frac{1}{3}S.MH_4 = \frac{1}{3}S.h$$

$$\Leftrightarrow MH_1 + MH_2 + MH_3 + MH_4 = h.$$

Vậy tổng các khoảng cách từ điểm M tới bốn mặt của tứ diện đều không phụ thuộc vào vị trí của điểm M nằm trong tứ diện đều đó.

Nếu tứ diện đều có cạnh bằng a thì $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ nên tổng các khoảng cách nói trên cũng bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

22. (h.23) *Cách 1.* Mặt phẳng (MCB') chia khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ thành hai khối chóp : $C.MABB'$ và $B'.MA'C'C$. Hai khối chóp đó có chiều cao bằng nhau (bằng chiều cao của tam giác đều ABC), có đáy là hai hình thang vuông bằng nhau. Suy ra hai khối chóp đó có thể tích bằng nhau.



Hình 23

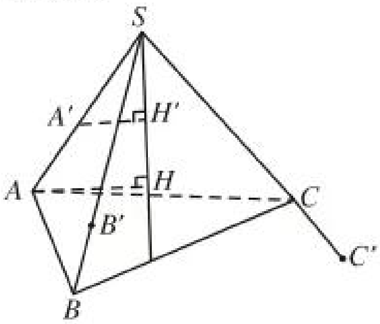
Cách 2. Gọi độ dài cạnh đáy của khối lăng trụ là a, độ dài cạnh bên là b, CH là đường cao của tam giác ABC. Khi đó $CH \perp (ABB'A')$, $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ta có :

$$V_{C.MABB'} = \frac{1}{3}S_{MABB'}.CH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2} + b\right)a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2b\sqrt{3}}{8},$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}b = \frac{a^2b\sqrt{3}}{4} = 2V_{C.MABB'}.$$

Suy ra $V_{C.MABB'} = V_{B'.MA'C'C}$.

23. (h.24) Gọi H và H' lần lượt là hình chiếu của A và A' trên mp(SBC). Khi đó ba điểm S, H, H' thẳng hàng (vì chúng là hình chiếu của ba điểm thẳng hàng S, A, A' trên mp(SBC)) và vì $A'H' \parallel AH$ nên $\dfrac{AH}{A'H'} = \dfrac{SA}{SA'}$. Ta có :



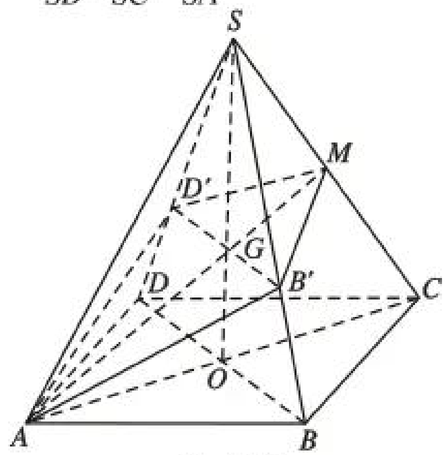
Hình 24

$$\frac{V}{V'} = \frac{V_{A.SBC}}{V_{A'.SB'C'}} = \frac{\frac{1}{3}S_{SBC}.AH}{\frac{1}{3}S_{SB'C'}.A'H'} = \frac{SB.SC.AH}{SB'.SC'.A'H'} = \frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}.\frac{SA}{SA'}.$$

24. (h.25) Gọi G là giao điểm của AM và SO (O là tâm của hình bình hành $ABCD$) thì G là trọng tâm tam giác SAC. Vậy $\dfrac{SG}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

Vì mp(P) song song với BD nên nó cắt mp(SBD) theo giao tuyến $B'D'$ đi qua G và $B'D' \parallel BD$ (với $B' \in SB$ và $D' \in SD$). Suy ra

$$\frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}.$$



Hình 25

Mặt phẳng (P) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần : khối chóp $S.AB'MD'$ và khối đa diện $ABCDB'MD'$. Ta có :

$$\frac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2}{9}.$$

$$\frac{V_{S.MB'D'}}{V_{S.CBD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{V_{S.MB'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{9}.$$

Từ đó suy ra :

$$\frac{V_{SAB'MD'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.AB'D'} + V_{S.MB'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $$\frac{V_{SAB'MD'}}{V_{ABCDB'MD'}} = \frac{1}{2}.$$

25. Giả sử phép vị tự f tỉ số k biến hình chóp $A.BCD$ thành hình chóp $A'.B'C'D'$. Khi đó, f biến đường cao AH của hình chóp $A.BCD$ thành đường cao $A'H'$ của hình chóp $A'.B'C'D'$. Bởi vậy $A'H' = |k|AH$. Tam giác BCD được biến thành tam giác $B'C'D'$ qua f nên $S_{B'C'D'} = k^2 S_{BCD}$.

Từ đó suy ra $$\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}S_{B'C'D'}.A'H'}{\frac{1}{3}S_{BCD}.AH} = |k|^3.$$