# MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA

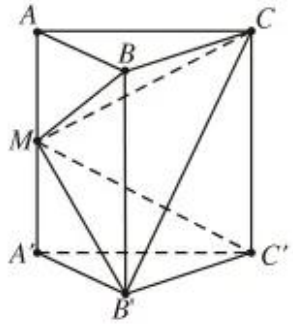
***(Để giáo viên tham khảo)***

**Các đề kiểm tra 15 phút**

**Đề 1.** Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $V$ và $M$ là trung điểm của cạnh bên $AA'$. Cắt khối lăng trụ bằng hai mặt phẳng $(MBC)$, $(MB'C')$, ta được ba khối chóp đỉnh $M$.

1. Kể tên ba khối chóp đó.

2. Tính thể tích của ba khối chóp nói trên theo $V$.



*Hình 32*

***Đáp án và thang điểm*** (h.32)

1. (4 điểm). Ba khối chóp đó là :

$$M.ABC,\ M.BCC'B',\ M.A'B'C'.$$

2. (6 điểm). Dễ thấy hai khối chóp tam giác $M.ABC$ và $M.A'B'C'$ cùng có đáy là đáy của khối lăng trụ và có chiều cao bằng một nửa chiều cao của khối lăng trụ. Vậy nếu gọi $S$, $h$ lần lượt là diện tích đáy và chiều cao của khối lăng trụ thì :

$$V_{M.ABC} = V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3}.S.\frac{1}{2}h = \frac{1}{6}S.h = \frac{1}{6}V.$$

$$V_{M.BCC'B'} = V - (V_{M.ABC} + V_{M.A'B'C'}) = V - \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}V.$$

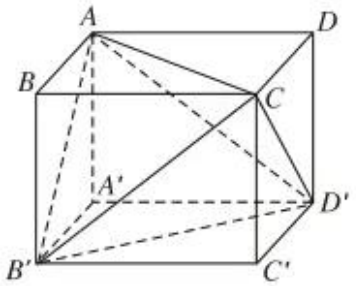
**Đề 2.** Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a$.

1. Chứng minh tứ diện $ACB'D'$ là tứ diện đều.

2. Chứng minh rằng bốn khối tứ diện sau đây có thể tích bằng nhau :

$$D'DAC,\ B'ABC,\ AA'B'D',\ CC'B'D'.$$

Hãy tính thể tích của mỗi khối đó theo a.



*Hình 33*

***Đáp án và thang điểm*** (h.33)

1. (4 điểm). Tứ diện $ACB'D'$ có các cạnh đều là đường chéo của các mặt của khối lập phương nên chúng bằng nhau (bằng $a\sqrt{2}$). Vậy $ACB'D'$ là tứ diện đều.

2. (6 điểm). Bốn khối tứ diện nêu trong bài toán là bốn khối chóp tam giác :

$$D'.DAC,\ B'.ABC,\ A.A'B'D',\ C.C'B'D'.$$

Bốn khối này có các mặt đáy bằng nhau ($\Delta DAC = \Delta BAC = \Delta A'B'D' = \Delta C'B'D'$) và có chiều cao bằng nhau (đều bằng $a$) nên chúng có thể tích bằng nhau.

Ta có $V_{D'.DAC} = \frac{1}{3}S_{DAC}.DD' = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}a^2.a = \frac{a^3}{6}$.

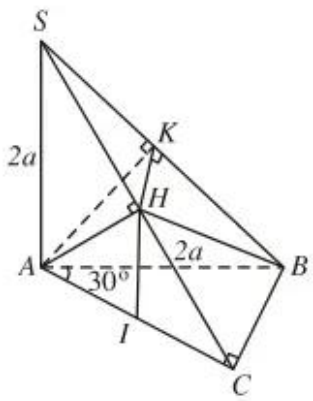
Vậy thể tích của mỗi khối bằng $\frac{a^3}{6}$.

## Các đề kiểm tra 45 phút

**Đề 1.** Cho khối chóp $S.ABC$ có đường cao $SA$ bằng $2a$, tam giác $ABC$ vuông ở $C$ có $AB = 2a$, $\widehat{CAB} = 30^o$. Gọi $H$ và $K$ lần lượt là hình chiếu của $A$ trên $SC$ và $SB$.

1. Tính thể tích khối chóp $H.ABC$.
2. Chứng minh rằng $AH \perp SB$ và $SB \perp (AHK)$.
3. Tính thể tích khối chóp $S.AHK$.

***Đáp án và thang điểm*** (h.34)



*Hình 34*

1. (4 điểm)

*Cách 1.* Trong mặt phẳng $(SAC)$, kẻ $HI$ song song với $SA$ thì $HI \perp (ABC)$.

Vậy $\quad V_{H.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.HI$.

Ta có $CA = AB.\cos 30^o = a\sqrt{3}$. Do đó

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 30^o = \frac{1}{2}.2a.a\sqrt{3}.\sin 30^o = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có :

$$\frac{HI}{SA} = \frac{HC}{SC} = \frac{HC.SC}{SC^2} = \frac{AC^2}{SC^2} = \frac{AC^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{3a^2}{4a^2 + 3a^2} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow HI = \frac{6}{7}a.$$

Vậy $\quad V_{H.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.HI = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{6}{7}a = \frac{a^3\sqrt{3}}{7}$.

*Cách 2.* $V_{H.ABC} = V_{B.AHC} = \frac{1}{3}S_{AHC}.BC$.

2. (3 điểm). Ta có $AH \perp SC$, $AH \perp CB$ (do $CB \perp (SAC)$), suy ra $AH \perp (SBC)$ $\Rightarrow AH \perp SB$.

Lại có : $SB \perp AK$, suy ra $SB \perp (AHK)$.

3. (3 điểm). Tam giác $SAB$ cân ở $A$ nên $SK = \frac{1}{2}SB$.

*Cách 1.* Theo kết quả bài tập 23, ta có

$$\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SH}{SC}.\frac{SK}{SB} = \frac{1}{2}.\frac{SH}{SC} = \frac{1}{2}\frac{SH.SC}{SC^2} = \frac{1}{2}\frac{SA^2}{SA^2 + AC^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4a^2}{4a^2 + 4a^2\cos^2 30^o} = \frac{2}{7}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy : $V_{S.AHK} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.\frac{2}{7} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{21}$.

*Cách 2.* $V_{S.AHK} = \frac{1}{3}S_{AHK}.SK$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có thể tính dễ dàng $AH$, $HK$ và $SK$. Từ đó, ta tính được thể tích khối chóp $S.AHK$.

**Đề 2.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác $ABC$ vuông tại $B$ và $AB = a$, $BC = 2a$, $AA' = 3a$. Một mặt phẳng $(P)$ đi qua $A$ và vuông góc với $CA'$ lần lượt cắt các đoạn thẳng $CC'$ và $BB'$ tại $M$ và $N$.

1. Tính thể tích khối chóp $C.A'AB$.

2. Chứng minh rằng $AN \perp A'B$.

3. Tính thể tích khối tứ diện $A'AMN$.

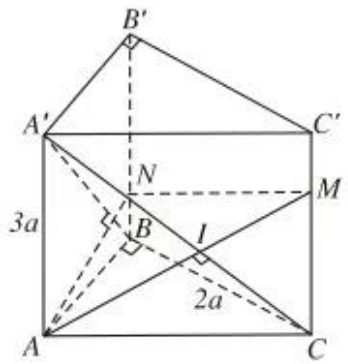
4. Tính diện tích tam giác $AMN$.

***Đáp án và thang điểm*** (h.35)

1. (2,5 điểm)

$$V_{C.A'AB} = V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.AA'$$

$$= \frac{1}{6}a.2a.3a = a^3.$$




*Hình 35*

2. (2,5 điểm). Ta có

$$CB \perp AB, CB \perp AA' \text{ (do } AA' \perp (ABC)\text{), suy ra } CB \perp (A'AB).$$

Mặt khác $AN \perp CA'$ (do $CA' \perp (AMN)$) suy ra $AN \perp A'B$ (định lí ba đường vuông góc).

3. (2,5 điểm). Ta có :

$$\begin{aligned} V_{A'AMN} &= V_{M.AA'N} \\ &= V_{M.AA'B} \text{ (vì } NB \,//\, AA') \\ &= V_{C.AA'B} \text{ (do } MC \,//\, (AA'B)) \\ &= a^3. \end{aligned}$$

4. (2,5 điểm).

$$\begin{aligned} S_{AMN} &= \frac{3.V_{A'.AMN}}{A'I} \\ &= \frac{3.a^3}{\dfrac{(3a)^2}{\sqrt{a^2 + (2a)^2 + (3a)^2}}} \\ &= \frac{a^2\sqrt{14}}{3}. \end{aligned}$$