MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA

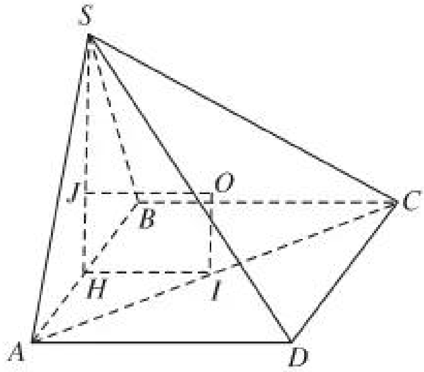
(Để giáo viên tham khảo)

Các đề kiểm tra 15 phút

Đề 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và mp(SAB) vuông góc với mp($ABCD$). Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

Đáp án và thang điểm

Kẻ SH là đường cao của hình chóp thì H là trung điểm của AB (h.61). Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$, J là trọng tâm của tam giác đều SAB, và O là điểm sao cho $JOIH$ là hình chữ nhật. Khi đó $OS = OA = OB$ (vì OJ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB) và $OA = OB = OC = OD$ (vì OI là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$).



Hình 61

Suy ra O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho. (5 điểm)

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp là $R = OA$. Ta có :

$$OA^2 = AI^2 + OI^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{7a^2}{12}.$$

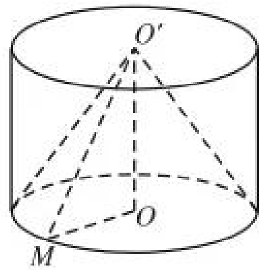
Vậy $R = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. (5 điểm)

Đề 2. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O\ ;\ R)$ và $(O'\ ;\ R)$, $OO' = R\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là O' và đáy là hình tròn $(O\ ;\ R)$.

a) Tính tỉ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón.

b) Mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần, tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Đáp án và thang điểm (h.62)



Hình 62

a) (6 điểm) Diện tích xung quanh của hình trụ là

$$S_1 = 2\pi R.R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2.$$

Lấy một đường sinh $O'M$ của hình nón thì

$$O'M = \sqrt{O'O^2 + OM^2} = \sqrt{3R^2 + R^2} = 2R.$$

Suy ra diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_2 = \pi R.2R = 2\pi R^2.$$

Vậy $$\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{3}.$$

b) (4 điểm) Khối trụ và khối nón có cùng đáy và cùng chiều cao nên thể tích của khối trụ bằng ba lần thể tích của khối nón. Như vậy, mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần : khối nón và phần còn lại có thể tích bằng hai lần thể tích của khối nón. Vậy tỉ số thể tích của hai phần đó là $\frac{1}{2}$.

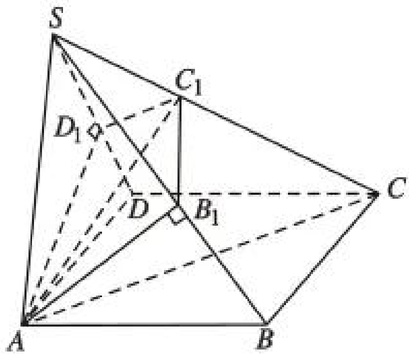
Các đề kiểm tra 45 phút

Đề 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = b$, đường cao của hình chóp là SA. Gọi B_1, C_1, D_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC, SD.

a) Chứng minh các điểm A, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc mặt phẳng vuông góc với SC.

b) Chứng minh các điểm A, B, C, D, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt cầu. Xác định tâm và tính diện tích của mặt cầu.

c) Chứng minh rằng tứ giác $AB_1C_1D_1$ nội tiếp đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó khi $SA = AC$.



Hình 63

Đáp án và thang điểm (h.63)

a) (3 điểm) Vì $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ nên $AB_1 \perp BC$, ngoài ra $AB_1 \perp SB$ nên $AB_1 \perp (SBC)$. Vậy $AB_1 \perp SC$.

Tương tự $\quad AD_1 \perp SC.$

Theo giả thiết ta có $\quad AC_1 \perp SC.$

Vậy các đường thẳng AB_1, AC_1, AD_1 cùng vuông góc với SC, từ đó các điểm A, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc mặt phẳng vuông góc với SC.

b) (3 điểm) Theo chứng minh ở câu a) thì $AB_1 \perp mp(SBC)$, từ đó $\widehat{AB_1C} = 90^o$.

Tương tự $\quad \widehat{AD_1C} = 90^o.$

Mặt khác, theo giả thiết $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{AC_1C} = 90^o$. Vậy các điểm A, B, C, D, B_1, C_1, D_1 nằm trên mặt cầu đường kính AC. Tâm mặt cầu là tâm O của hình chữ nhật $ABCD$. Bán kính mặt cầu là $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ nên diện tích mặt cầu là $S = \pi(a^2 + b^2)$.

c) (4 điểm). Theo câu a), bốn điểm A, B_1, C_1, D_1 đồng phẳng. Mặt khác, theo câu b), bốn điểm đó cùng nằm trên một mặt cầu nên $AB_1C_1D_1$ là tứ giác nội tiếp. Tứ giác đó có góc B_1 và D_1 vuông nên AC_1 là đường kính của đường tròn ngoại tiếp. Vì $SA = AC = \sqrt{a^2 + b^2}$ nên $AC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

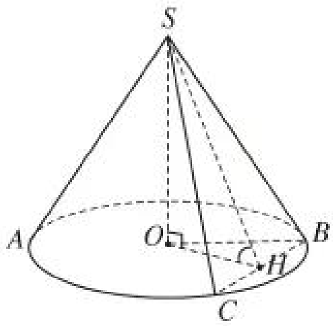
Vậy đường tròn đó có bán kính là $\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2 + b^2}$.

Đề 2. Cắt hình nón $\mathfrak{N}$ (đỉnh S) cho trước bởi mặt phẳng đi qua trục của nó, ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của $\mathfrak{N}$.

b) Cho một dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mp(SBC) tạo với đáy hình nón một góc 60^o. Tính diện tích tam giác SBC.

c) Tính diện tích và thể tích của hình cầu nội tiếp hình nón.



Hình 64

Đáp án và thang điểm

a) (4 điểm) Giả sử cắt hình nón $\mathfrak{N}$ bởi mặt phẳng đi qua trục SO của nó, ta được tam giác vuông cân SAB (h.64).

Từ giả thiết suy ra $\mathfrak{N}$ có bán kính đáy là $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, chiều cao $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và đường sinh $l = a$. Vậy

$$S_{xq} = \pi Rl = \frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2} \; ;$$

$$S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = \frac{(\sqrt{2}+1)\pi a^2}{2} \; ;$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}.$$

b) (3 điểm) Giả sử thiết diện là tam giác SBC. Kẻ $OH \perp BC$ thì $SH \perp BC$ và $\widehat{SHO} = 60^{\circ}$. Bởi vậy :

$$SH = \frac{SO}{\sin 60^{\circ}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \; ;$$

$$BH = \sqrt{SB^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra diện tích tam giác cân SBC là

$$S = SH.HB = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$

c) (3 điểm) Mặt phẳng (SAB) cắt mặt cầu nội tiếp hình nón theo một đường tròn lớn nội tiếp tam giác SAB, vậy bán kính r của mặt cầu đó bằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác SAB. Suy ra :

$$r = \frac{2S_{SAB}}{AB + 2SA} = \frac{a^2}{a\sqrt{2} + 2a} = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}.$$

Vậy mặt cầu nội tiếp có diện tích :

$$S = 4\pi r^2 = \pi a^2(2-\sqrt{2})^2$$

và có thể tích : $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{\pi\left(2-\sqrt{2}\right)^3 a^3}{6}.$