MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA

(Để giáo viên tham khảo)

Các đề kiểm tra 15 phút

Đề 1. (sau §2 chương III) Cho ba điểm $A(-2 ; 5 ; -3)$, $B(1 ; -3 ; 2)$, $C(2 ; 0 ; -1)$.

a) Viết phương trình mp(ABC).

b) Tính thể tích tứ diện $OABC$.

Đáp án và thang điểm

a) (5 điểm). $\overrightarrow{AB} = (3;-8;5)$, $\overrightarrow{AC} = (4;-5;2)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (9;14;17)$.

Mặt phẳng (ABC) đi qua $A(-2 ; 5 ; -3)$, có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ nên có phương trình :

$$9(x+2) + 14(y-5) + 17(z+3) = 0 \text{ hay } 9x + 14y + 17z - 1 = 0.$$

b) (5 điểm). Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (9;14;17)$ và $\overrightarrow{OA} = (-2;5;-3)$ nên thể tích V của tứ diện $OABC$ là :

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{OA}\right| = \frac{1}{6}\left|-18 + 70 - 51\right| = \frac{1}{6}.$$

Đề 2. (sau §3 chương III).

Cho điểm $B(-2 ; 1 ;-3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình

$$2x - 3y + 5z - 4 = 0.$$

Viết phương trình chính tắc và tham số của đường thẳng d đi qua B và vuông góc với (P).

Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng OB trên mp(P).

Đáp án và thang điểm

a) (5 điểm). Đường thẳng d đi qua B có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{n_P}(2;-3;5)$ nên có phương trình $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = -3 + 5t. \end{cases}$

b) (5 điểm). Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua OB và vuông góc với (P) thì nó có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{n_P}\right] = (-4\ ;\ 4\ ;\ 4)$, vậy có thể lấy $\overrightarrow{n_Q} = (-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$; ngoài ra (Q) đi qua điểm $(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ nên (Q) có phương trình : $-x + y + z = 0$. Hình chiếu của đường thẳng OB trên mp(P) chính là giao tuyến của (P) và (Q) nên suy ra phương trình tham số của hình chiếu là :

$$\begin{cases} x = -4 + 8t \\ y = -4 + 7t \\ z = t. \end{cases}$$

Các đề kiểm tra 45 phút

Đề 1. Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho các điểm : $A(3\ ;\ -2\ ;\ -2)$, $B(3\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$ và $D(-1\ ;\ 1\ ;\ 2)$.

1) Viết phương trình mp(BCD). Chứng tỏ rằng $ABCD$ là hình tứ diện. Tính thể tích của nó.

2) Viết phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với mp(BCD).

3) Viết phương trình đường thẳng d đi qua A, song song với mp(BCD) và vuông góc với Oz.

Đáp án và thang điểm

1) (4 điểm). Ta có $\overrightarrow{BC} = (-3;0;1)$, $\overrightarrow{BD} = (-4;-1;2)$, suy ra $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right] = (1;2;3)$.

Mặt phẳng (BCD) đi qua $B(3\ ;\ 2\ ;\ 0)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]$ nên có phương trình

$$(x-3) + 2(y-2) + 3z = 0 \text{ hay } x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

Vì toạ độ điểm A không phải là nghiệm của phương trình đó nên A không thuộc mp(BCD), do đó $ABCD$ là hình tứ diện. Ta có : $\overrightarrow{BA} = (0\,;-4\,;-2)$ nên

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BA}\right| = \frac{1}{6}|-8-6| = \frac{7}{3}.$$

2) (4 điểm). Khoảng cách từ A đến mp(BCD) là

$$d = \frac{|3 - 2.2 - 3.2 - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{14}.$$

Mặt cầu cần tìm có tâm A, bán kính $R = d$ nên có phương trình :

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 14 \text{ hay}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 4z + 3 = 0.$$

3) (2 điểm). Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của d thì $\vec{u}$ phải vuông góc với vectơ $\vec{n}(1;2;3)$ và $\vec{k}(0;0;1)$ nên $\vec{u} = (2;-1;0)$. Ngoài ra, d đi qua $A(3;-2;-2)$ nên d có phương trình :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -2. \end{cases}$$

Đề 2. Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng d, d' và mp(α) :

$$d: \frac{x-1}{3} = y - 2 = \frac{z+1}{2},\quad d': \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 2t \\ z = 4 - 2t \end{cases},\quad (\alpha): x + y - z - 2 = 0.$$

1) Chứng minh d và d' chéo nhau. Tính khoảng cách giữa d và d'.

2) Tìm toạ độ giao điểm I của d và (α). Viết phương trình mặt cầu tâm I đi qua O.

3) Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (α), cắt cả d và d'.

Đáp án và thang điểm

1) (4 điểm). Đường thẳng d đi qua $M(1;2;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(3;1;2)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(2, 0, 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u'}(-3;2;-2)$.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (1;-2;5)$, $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = (-6;0;9)$, $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{MM'} = 39 \neq 0$.

Vậy d và d' chéo nhau. Gọi h là khoảng cách giữa d và d' thì :

$$h = \frac{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right]\right|} = \frac{39}{\sqrt{36+81}} = \sqrt{13}.$$

2) (3 điểm). Toạ độ giao điểm I của d và (α) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = y-2 = \dfrac{z+1}{2} \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y-5 \\ z = 2y-5 \\ x+y-z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y-5 \\ z = 2y-5 \\ (3y-5)+y-(2y-5)-2=0. \end{cases}$$

Suy ra $I = (-2\ ;\ 1\ ;\ -3)$.

Bán kính mặt cầu cần tìm là $R = OI = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$. Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình :

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 14.$$

3) (3 điểm). Gọi $J = d' \cap (\alpha)$ thì toạ độ của J là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x = 2-3t \\ y = 2t \\ z = 4-2t \\ x+y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow t = 4 \Rightarrow J = (-10\ ;\ 8\ ;\ -4).$$

Đường thẳng cần tìm phải đi qua I và J nên có phương trình :

$$\frac{x+2}{-10+2} = \frac{y-1}{8-1} = \frac{z+3}{-4+3} \Leftrightarrow \frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{-7} = \frac{z+3}{1}.$$