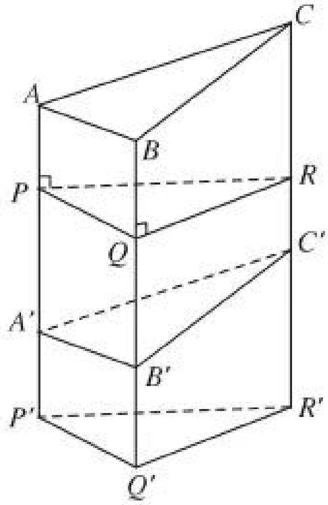
ÔN TẬP CUỐI NĂM

A. Bài tập tự luận

1. a) (h.68) Mặt phẳng (PQR) chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$, trong đó $\mathscr{H}_1$ chứa tam giác ABC còn $\mathscr{H}_2$ chứa tam giác $A'B'C'$. Mặt phẳng $(A'B'C')$ chia khối lăng trụ $PQR.P'Q'R'$ thành hai khối đa diện $\mathscr{H}_2$ và $\mathscr{H}_3$, trong đó $\mathscr{H}_3$ chứa tam giác $P'Q'R'$. Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của các khối đa diện $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}_3$, ta có :



Hình 68

$$V_{ABC.A'B'C'} = V_1 + V_2,\ \ V_{PQR.P'Q'R'} = V_2 + V_3.$$

Vì phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ và biến tam giác PQR thành tam giác $P'Q'R'$ nên khối đa diện $\mathscr{H}_1$ biến thành khối đa diện $\mathscr{H}_3$, vì vậy ta có $V_1 = V_3$. Từ đó suy ra

$$V_{ABC.A'B'C'} = V_{PQR.P'Q'R'}.$$

b) Vì lăng trụ $PQR.P'Q'R'$ là lăng trụ đứng có chiều cao $PP' = AA'$ nên

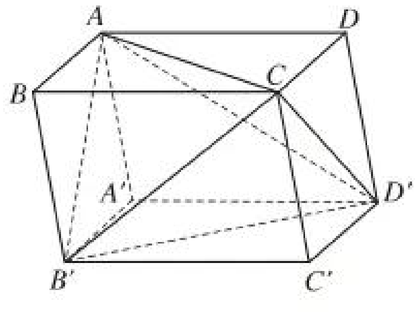
$$V_{ABC.A'B'C'} = V_{PQR.P'Q'R'} = S_{PQR}.AA'.$$

2. Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ và A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC thì phép vị tự tâm G với tỉ số $k = -\dfrac{1}{3}$ biến tứ diện $ABCD$ thành tứ diện $A'B'C'D'$.

Bởi vậy $V_{A'B'C'D'} = |k|^3 V_{ABCD} = \dfrac{1}{27}V.$

3. (h.69) Các tứ diện $BACB'$, $C'B'CD'$, $DD'AC$, $A'AB'D'$ đều có thể tích bằng $\dfrac{V}{6}$. Bởi vậy :

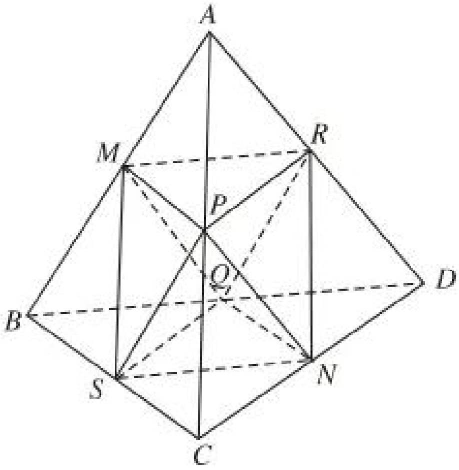
$$V_{ACB'D'} = V - 4.\frac{V}{6} = \frac{V}{3}.$$



Hình 69

4. (h.70) Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AC, BD, AD, BC của tứ diện đều $ABCD$ thì dễ thấy các tam giác MPR, MRQ, MQS, MSP, NPR, NRQ, NQS, NSP là những tam giác đều, vậy ta có hình tám mặt đều $MNPQRS$. Vì các tứ diện $AMPR$, $BMQS$, $CPSN$, $DQNR$ đều là những tứ diện đồng dạng với tứ diện $ABCD$ với tỉ số $k = \dfrac{1}{2}$ nên có thể tích bằng $\dfrac{V}{8}$.

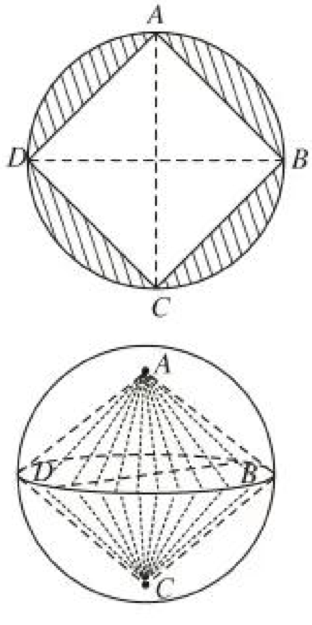
Suy ra $V_{MPRQSN} = V - 4.\dfrac{V}{8} = \dfrac{V}{2}$.



Hình 70

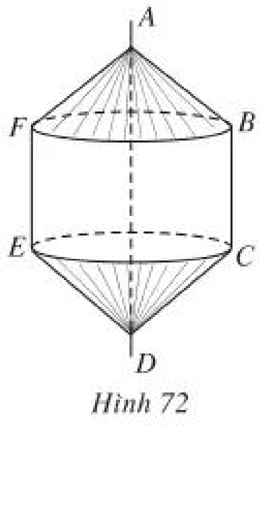
5. (h.71) Khi quay quanh đường chéo AC thì hình tròn $(O\ ;R)$ sinh ra khối cầu (S), đoạn thẳng BD sinh ra hình tròn $(\mathscr{C})$ và hình vuông $ABCD$ sinh ra hình tròn xoay $\mathscr{K}$ gồm hai hình nón có chung đáy là $(\mathscr{C})$ với đỉnh là A và C. Bởi vậy, $\mathscr{H}$ sinh ra khối tròn xoay gồm những điểm thuộc hình cầu (S) nhưng không thuộc $\mathscr{K}$ và thể tích V của khối đó là :

$$V = V_{(S)} - V_{\mathscr{K}} = \frac{4}{3}\pi R^3 - 2.\frac{1}{3}\pi R^2.R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$



Hình 71

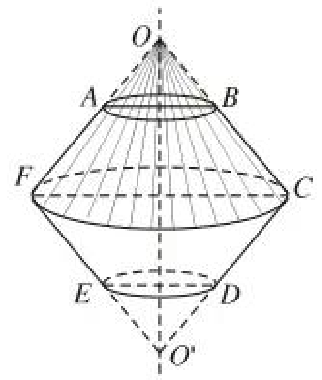
6. a) (h.72) Khi quay lục giác đều $ABCDEF$ quanh đường thẳng AD, ta được khối tròn xoay hợp bởi ba khối : khối nón $\mathfrak{N}_1$ sinh bởi tam giác ABF, khối trụ $\mathcal{T}$ sinh bởi hình chữ nhật $BCEF$ và khối nón $\mathfrak{N}_2$ sinh bởi tam giác DCE. Hai khối nón và khối trụ đều có bán kính đáy là $R = \dfrac{BF}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khối trụ có chiều cao a và các khối nón có chiều cao $\dfrac{a}{2}$. Vậy khối tròn xoay sinh bởi lục giác đã cho có thể tích là :



Hình 72

$$V = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 .a + 2.\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 .\frac{a}{2} = \pi a^3.$$

b) (h.73) Gọi Δ là đường thẳng nối trung điểm của AB và ED. Khi đó BC và AF cắt nhau tại điểm O trên Δ, CD và FE cắt nhau tại điểm O' trên Δ. Gọi V, V_1, V_2 là thể tích của các khối tròn xoay lần lượt sinh ra bởi lục giác đều $ABCDEF$, tam giác OCF và tam giác OAB khi quay quanh Δ, ta có :



Hình 73

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3} \;;$$

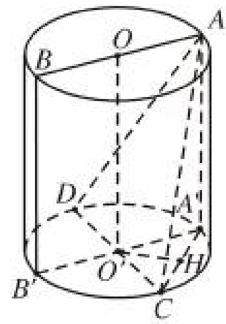
$$V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Do đó $V = 2(V_1 - V_2) = \dfrac{7\sqrt{3}\pi a^3}{12}$.

7. (h.74) a) Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng chứa đường tròn đáy có đường kính CD, dễ thấy A, B thuộc đường tròn này. Khi đó $A'B' \perp CD$ nên $A'CB'D$ là hình vuông có đường chéo $CD = 2R$, do đó $A'C = R\sqrt{2}$, ngoài ra $AA' = R\sqrt{2}$ nên ta suy ra $AC = 2R$.

Tương tự ta có $AD = BC = BD = 2R$.

Vậy $ABCD$ là tứ diện đều.



Hình 74

b) Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó, khoảng cách d giữa hai đường thẳng OO' và AC bằng khoảng cách giữa OO' và mp$(AA'C)$ và bằng $O'H$ (H là trung điểm của $A'C$). Vậy $d = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Tương tự, khoảng cách giữa mỗi đường thẳng AD, BC, BD và OO' đều bằng $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. Từ đó suy ra các cạnh AC, AD, BC, BD đều tiếp xúc với mặt trụ $\mathcal{T}$ có trục là OO' và có bán kính $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

8. a) Ta có :

$$\overrightarrow{AB} = (3\,;-3\,;-8), \overrightarrow{AC} = (4\,;0\,;-4), \overrightarrow{AD} = (0\,;-3\,;1).$$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (12\,;-20\,;12) \text{ và } \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 72 \neq 0.$$

Suy ra bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

b) Giả sử mặt cầu (S) có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0.$$

Vì mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D nên ta có :

$$\begin{cases} 1 + 25 + 9 + 2a + 10b + 6c + d = 0 \\ 16 + 4 + 25 + 8a + 4b - 10c + d = 0 \\ 25 + 25 + 1 + 10a + 10b - 2c + d = 0 \\ 1 + 4 + 16 + 2a + 4b + 8c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a + 3b + 8c = 5 \\ -a \qquad\quad + c = 2 \\ \qquad 3b - c = -7. \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được $a = -1$, $b = -2$, $c = 1$, $d = -19$. Vậy phương trình mặt cầu (S) là :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 19 = 0.$$

Mặt cầu (S) có tâm $I = (1\,;2\,;-1)$ và bán kính $R = \sqrt{1 + 4 + 1 + 19} = 5$.

c) mp(ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ cùng phương với vectơ $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (12\,;-20\,;12)$ nên có thể lấy $\vec{n} = (3\,;-5\,;3)$. Ngoài ra, mặt phẳng đó đi qua điểm $A(1\ ;\ 5\ ;\ 3)$ nên có phương trình :

$$3(x-1) - 5(y-5) + 3(z-3) = 0 \text{ hay } 3x - 5y + 3z + 13 = 0.$$

Khoảng cách từ D đến mặt phẳng đó là :

$$h = \frac{|3.1 - 5.2 + 3.4 + 13|}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 3^2}} = \frac{18}{\sqrt{43}}.$$

d) Mặt phẳng (α) vuông góc với CD có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{CD} = (-4\,;-3\,;5)$ nên có phương trình : $-4x - 3y + 5z + d = 0$.

Mặt phẳng đó tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi khoảng cách từ tâm $I(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ của mặt cầu (S) tới mặt phẳng (α) bằng 5, tức là :

$$\frac{\left|-4.1 - 3.2 - 5.1 + d\right|}{\sqrt{16 + 9 + 25}} = 5 \Leftrightarrow \frac{\left|-15 + d\right|}{\sqrt{50}} = 5 \Leftrightarrow d = 15 \pm 25\sqrt{2}.$$

Vậy ta có hai mặt phẳng cần tìm với phương trình :

$$-4x - 3y + 5z + 15 \pm 25\sqrt{2} = 0.$$

e) Tâm mặt cầu (S) là $I(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$. Khoảng cách từ I tới (Oxy) là $d_1 = |-1| = 1$ nên (S) cắt mp(Oxy) theo đường tròn có bán kính

$$r_1 = \sqrt{R^2 - d_1^2} = \sqrt{25 - 1} = 2\sqrt{6}.$$

Khoảng cách từ I tới mp(Oyz) là $d_2 = 1$ nên (S) cắt mp(Oyz) theo đường tròn có bán kính $r_2 = \sqrt{R^2 - d_2^2} = \sqrt{25 - 1} = 2\sqrt{6}$.

Khoảng cách từ I tới mp(Oxz) là $d_3 = 2$ nên (S) cắt mp(Oxz) theo đường tròn có bán kính $r_3 = \sqrt{R^2 - d_3^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$.

9. a) Đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 3t. \end{cases}$

Vì mỗi điểm $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ có hình chiếu trên mp(Oxy) là $M'(x\ ;\ y\ ;\ 0)$ nên hình chiếu d_1 của Δ trên mặt phẳng (Oxy) có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 0. \end{cases}$$

Tương tự, hình chiếu d_2 của Δ trên mặt phẳng (Oyz) là

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - t \\ z = 3t, \end{cases}$$

hình chiếu d_3 của Δ trên mặt phẳng (Oxz) là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 3t. \end{cases}$$

b) Mặt phẳng (α) đã cho có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1 ; 5 ; 1)$.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2, -1, 3)$.

Vì $\vec{n}.\vec{u} = 0$ nên Δ song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α).

Lại có điểm $M(1 ; -1 ; 0)$ của Δ nằm trên (α) nên Δ nằm trên (α).

c) Khoảng cách h_1 giữa Oz và Δ bằng khoảng cách từ O tới đường thẳng d_1. Xét trong mặt phẳng toạ độ Oxy thì $O = (0 ; 0)$ còn đường thẳng d_1 có phương trình : $\quad x + 2y + 1 = 0$.

Vậy ta có

$$h_1 = \frac{|1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Tương tự :

Khoảng cách h_2 giữa Ox và Δ bằng khoảng cách từ O tới đường thẳng d_2 nên :

$$h_2 = \frac{|3|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10};$$

Khoảng cách h_3 giữa Oy và Δ bằng khoảng cách từ O tới đường thẳng d_3 nên :

$$h_3 = \frac{|-3|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

d) Lấy điểm $P = (1 + 2t ; -1 - t ; 3t)$ nằm trên Δ và điểm $Q = (t' ; t' ; t')$ nằm trên Δ'. Ta có

$$\overrightarrow{QP} = (1 + 2t - t' ; -1 - t - t' ; 3t - t').$$

PQ là đường vuông góc chung của Δ và Δ' khi và chỉ khi $\overrightarrow{QP}$ vuông góc với cả hai vectơ chỉ phương của Δ và Δ' là $\overrightarrow{u_\Delta}(2; -1; 3)$ và $\overrightarrow{u_{\Delta'}}(1 ; 1 ; 1)$.

Như vậy ta có $\quad \overrightarrow{QP}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0$ và $\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{u_{\Delta'}} = 0$ hay là :

$$\begin{cases} 2(1 + 2t - t') - (-1 - t - t') + 3(3t - t') = 0 \\ 1 + 2t - t' - 1 - t - t' + 3t - t' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14t - 4t' + 3 = 0 \\ 4t - 3t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{9}{26} \\ t' = -\dfrac{6}{13}. \end{cases}$$

Do đó $\quad Q = \left(-\dfrac{6}{13}\,;-\dfrac{6}{13}\,;-\dfrac{6}{13}\right)$ và $\overrightarrow{QP} = \left(\dfrac{20}{26}\,;-\dfrac{5}{26}\,;-\dfrac{15}{26}\right)$.

Đường vuông góc chung của Δ và Δ' đi qua Q, nhận $\vec{v} = (4;-1;-3)$ là m vectơ chỉ phương nên có phương trình :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{6}{13} + 4t \\ y = -\dfrac{6}{13} - t \\ z = -\dfrac{6}{13} - 3t. \end{cases}$$

e) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hình chiếu d_1 của đường thẳng Δ có phương trình $\qquad x + 2y + 1 = 0$

và hình chiếu d_1' của Δ' có phương trình $x = y$.

Giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_1' là $I = \left(-\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{1}{3}\,;0\right)$.

Khi đó, đường thẳng đi qua I, song song với Oz sẽ cắt cả hai đường thẳng Δ và Δ'. Phương trình đường thẳng đó là :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = t. \end{cases}$$

10. a) Giả sử $M = (x\,;y\,;z)$, khi đó :

$$MA^2 - MB^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow (1-x)^2 + (-1-y)^2 + (2-z)^2 - (2-x)^2 - y^2 - (1-z)^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow 2x + 2y - 2z - 1 = 0. \qquad (*)$$

Vậy quỹ tích các điểm M là mặt phẳng có phương trình (*).

b) Giả sử $N = (x\,;y\,;z)$, khi đó :

$$NA^2 + NB^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow (1-x)^2 + (-1-y)^2 + (2-z)^2 + (2-x)^2 + y^2 + (1-z)^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 3x + y - 3z + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Vậy quỹ tích các điểm N là mặt cầu có tâm $I\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, bán kính $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Mặt phẳng (OAB) đi qua O, có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(-1;3;2)$ nên có phương trình :

$$-x+3y+2z=0.$$

Điểm $M(x;y;z)$ cách đều mp(OAB) và mp(Oxy) khi và chỉ khi :

$$\frac{|-x+3y+2z|}{\sqrt{1+9+4}}=|z| \Leftrightarrow -x+3y+2z=\pm\sqrt{14}z$$

$$\Leftrightarrow -x+3y+(2\mp\sqrt{14})z=0. \qquad (*)$$

Vậy quỹ tích cần tìm là hai mặt phẳng có phương trình (*).

11. a) Dễ thấy đường thẳng Δ đi qua điểm cố định $A(1;1;5)$. Ta có $\vec{u}(a;b;c)$ là một vectơ chỉ phương của Δ. Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và trục Oz. Khi đó

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{k}\right)\right|=\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|=\left|\frac{c}{c\sqrt{2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos 45^{\circ}.$$

Vậy $\varphi=45^{\circ}$.

b) Toạ độ giao điểm $M(x;y;z)$ của đường thẳng Δ và mp(Oxy) thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases}x=1+at\\y=1+bt\\z=5+ct\\z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1=at\\y-1=bt\\t=-\dfrac{5}{c}\\z=0.\end{cases}$$

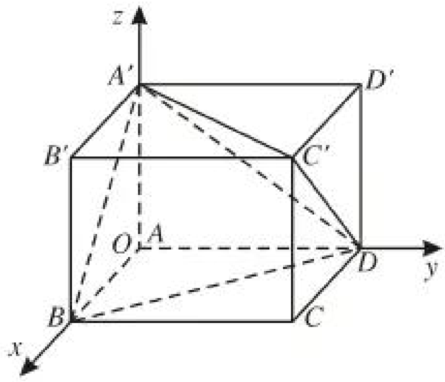
(Để ý rằng $c\neq 0$ vì nếu $c=0$ thì $a=b=0$, vô lí).

Từ đó suy ra toạ độ $(x;y;z)$ của M thoả mãn điều kiện

$$(x-1)^2+(y-1)^2=(a^2+b^2)\left(-\frac{5}{c}\right)^2=25 \text{ và } z=0.$$

Vậy quỹ tích điểm M khi Δ thay đổi là đường tròn tâm $I(1;1;0)$, bán kính bằng 5 và nằm trong mặt phẳng (Oxy).

12. (h.75) Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho O trùng A, tia Ox là tia AB, tia Oy là tia AD, tia Oz là tia AA'. Khi đó $A = (0 ; 0 ; 0)$, $B = (a ; 0 ; 0)$, $D = (0 ; b ; 0)$, $A' = (0 ; 0 ; c)$, $C = (a ; b ; 0)$, $D' =(0 ; b ; c)$, $B' = (a ; 0 ; c)$, $C'= (a ; b ; c)$.



Hình 75

a) Phương trình mp($A'BD$) là :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Bởi vậy khoảng cách từ A tới mặt phẳng ($A'BD$) là

$$d = \frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

b) $\overrightarrow{A'C'} = (a ; b ; 0)$, $\overrightarrow{C'D} = (-a ; 0 ; -c)$, $\left[\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{C'D}\right] = (-bc ; ac ; ab)$.

Vậy khoảng cách từ A' tới đường thẳng $C'D$ là :

$$h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{C'D}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{C'D}\right|} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

c) $\overrightarrow{BC'} = (0, b, c)$, $\overrightarrow{CD'} = (-a ; 0 ; c)$, $\overrightarrow{BC} = (0, b, 0)$.

Vậy khoảng cách giữa BC' và CD' là

$$h' = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CD'}\right].\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CD'}\right]\right|} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

B. Câu hỏi trắc nghiệm

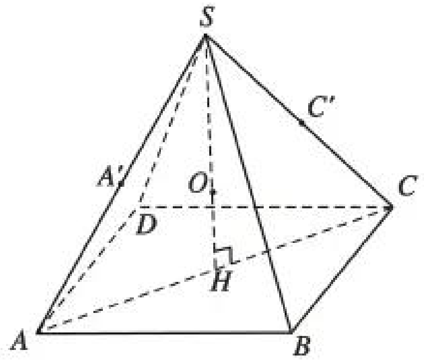
1. (C), **2.** (C), **3.** (D), **4.** (B), **5.** (A), **6.** (B), **7.** (A), **8.** (C), **9.** (A), **10.** (B), **11.** (A), **12.** (C), **13.** (B), **14.** (D), **15.** (A), **16.** (B), **17.** (D), **18.** (D), **19.** (A), **20.** (A), **21.** (D), **22.** (D), **23.** (B).

C. Một số đề kiểm tra

Đề I.

Câu 1. (h.76) a) Tam giác SAC là tam giác đều có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ nên có đường cao $SH = a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Hiển nhiên SH cũng là đường cao của hình chóp. Suy ra thể tích của hình chóp là

$$V = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$



Hình 76

b) Gọi O là trọng tâm của tam giác đều SAC thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Bán kính mặt cầu là

$$R = OS = \frac{2}{3}SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

c) Hai hình chóp đó đối xứng với nhau qua mp(SBD) nên bằng nhau.

Câu 2. a) Ta có $AB = \sqrt{(1-4)^2 + (2+1)^2 + (2-2)^2} = 3\sqrt{2}$,

$$BC = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-2)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{2},$$

$$CA = \sqrt{(4-1)^2 + (-1+1)^2 + (2-5)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Suy ra $AB = BC = CA$ và do đó, ABC là tam giác đều.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;3;0)$, $\overrightarrow{AC} = (-3;0;3)$, $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (9;9;9)$. Bởi vậy, mp($ABC$) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;1)$ và đi qua điểm $A(4;-1;2)$ nên có phương trình : $x - 4 + y + 1 + z - 2 = 0$ hay $x + y + z - 5 = 0$.

Mặt phẳng (ABC) cắt các trục toạ độ tại các điểm $M(5\,;\,0\,;\,0)$, $N(0\,;\,5\,;\,0)$ và $P(0\,;\,0\,;\,5)$. Vậy mặt phẳng đó và các mặt phẳng toạ độ tạo thành tứ diện $OMNP$ có thể tích là

$$V = \frac{1}{6}OM.ON.OP = \frac{5.5.5}{6} = \frac{125}{6}.$$

c) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC là trọng tâm G của tam giác đó, vậy $G = \left(\frac{4+1+1}{3}; \frac{-1+2-1}{3}; \frac{2+2+5}{3}\right) = (2;0;3)$. Trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường thẳng đi qua G, có vectơ chỉ phương $\vec{n}(1;1;1)$ nên có phương trình :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

d) $ABCD$ là tứ diện đều khi và chỉ khi D nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $DA = AB = 3\sqrt{2}$. Do đó $D = (2+t;t;3+t)$ và $DA^2 = 18$, suy ra

$$(2+t-4)^2 + (t+1)^2 + (3+t-2)^2 = 18 \Leftrightarrow t = \pm 2.$$

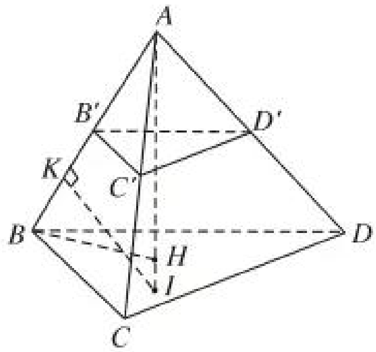
Suy ra có hai điểm thoả mãn yêu cầu bài toán :

$$D_1 = (4;2;5) \quad \text{và} \quad D_2 = (0;-2;1).$$

Đề II.

Câu 1. (h.77)

a) Gọi AH là đường cao của hình tứ diện đều $ABCD$ thì AH là trục của cả hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và tam giác $B'C'D'$. Bởi vậy, nếu gọi I là giao điểm của đường thẳng AH và mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng BB' thì $IB = IC = ID = IB' = IC' = ID'$, hay sáu điểm B, C, D, B', C', D' nằm trên mặt cầu tâm I, bán kính IB.



Hình 77

Gọi K là trung điểm của BB' thì từ hai tam giác vuông đồng dạng AIK và ABH, ta có :

$$\frac{IK}{BH} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow IK = \frac{BH.AK}{AH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{3a}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{3\sqrt{2}a}{8}.$$

Vậy $\quad IB^2 = IK^2 + KB^2 = \frac{9a^2}{32} + \frac{a^2}{16} = \frac{11a^2}{32}.$

Bán kính mặt cầu là $R = IB = \dfrac{a\sqrt{11}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{22}}{8}$.

b) Hai hình chóp $D.BCC'B'$ và $D.ABC$ có chung chiều cao, còn diện tích hình thang $BCC'B'$ bằng 3/4 diện tích tam giác ABC, bởi vậy thể tích V của hình chóp $D.BCC'B'$ là :

$$V = \frac{3}{4}V_{ABCD} = \frac{3}{4}.\frac{1}{3}S_{BCD}.AH = \frac{1}{4}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{16}.$$

Câu 2.

a) Giả sử mặt cầu (S) có phương trình :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0.$$

Vì mặt cầu đi qua A, A', B, C nên toạ độ của các điểm đó phải thoả mãn phương trình mặt cầu, tức là :

$$\begin{cases} 4 + 4a + d = 0 \\ 36 + 12a + d = 0 \\ 9 + 6b + d = 0 \\ 16 + 8c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -4,\ b = -\frac{7}{2},\ c = -\frac{7}{2},\ d = 12.$$

Vậy phương trình mặt cầu là :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 7y - 7z + 12 = 0.$$

Toạ độ các điểm B' và C' cũng thoả mãn phương trình trên nên các điểm đó cũng nằm trên mặt cầu.

b) Vì G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ nên $G = \left(2; \frac{4}{3}; 1\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2\,;\,3\,;\,0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2\,;\,0\,;\,4)$, vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OG} = 0$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OG} = 0$, suy ra $OG \perp AC, OG \perp AB$, do đó $OG \perp$ mp(ABC). Vì tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nên nếu H là trực tâm của tam giác ABC thì $OH \perp$ mp(ABC). Vậy ba điểm O, H, G cùng nằm trên một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là :

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{\frac{4}{3}} = z \text{ hay } \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}.$$

c) Giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (ABC') và $(A'B'C)$ gồm những điểm $M(x;\,y;\,z)$ thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{3}=1 \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y+2z=6 \\ 2x+3y+3z=12. \end{cases}$$

Suy ra đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0=\left(\frac{-6}{5};\frac{24}{5};0\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(0\,;-1;1)$.

Vậy khoảng cách từ O tới Δ là :

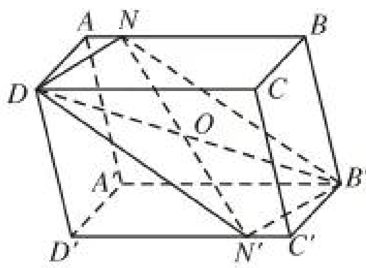
$$\frac{\left|\left[\overrightarrow{OM_0},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}\frac{24}{5} & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}0 & -\frac{6}{5}\\ 1 & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-\frac{6}{5} & \frac{24}{5}\\ 0 & -1\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{18}{5}.$$

Đề III.

Câu 1. (h.78)

a) Gọi N' là điểm đối xứng với N qua tâm O của hình hộp. Khi đó, mp(α) cắt hình hộp theo thiết diện là hình bình hành $DNB'N'$.

b) Tâm O của hình hộp cũng là tâm của hình bình hành $DNB'N'$. Phép đối xứng qua tâm O biến các đỉnh của hình hộp thành các đỉnh của hình hộp, biến các đỉnh của hình bình hành $DNB'N'$ thành các đỉnh của hình bình hành đó. Bởi vậy, phép đối xứng qua tâm O biến các đỉnh của hình đa diện $\mathscr{H}_1$ thành các đỉnh của hình đa diện $\mathscr{H}_2$. Do đó $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$ bằng nhau.



Hình 78

c) Gọi V là thể tích khối hộp đã cho thì thể tích V_1 của khối đa diện $\mathscr{H}_1$ là $\frac{V}{2}$, còn thể tích V_2 của khối tứ diện $AA'BD$ là $\frac{V}{6}$. Suy ra $\frac{V_1}{V_2}=3$.

Câu 2.

a) Khoảng cách từ điểm $A(1;-3;-1)$ tới trục Ox là $d=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$, khoảng cách từ điểm $B(-2\,;1\,;3)$ tới trục Ox là $d'=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$. Vậy hai khoảng cách đó bằng nhau.

b) Vì điểm C nằm trên Oz nên $C = (0\ ;\ 0\ ;\ c)$, khi đó $\overrightarrow{CA} = (1\ ; -3\ ; -1-c)$, $\overrightarrow{CB} = (-2\ ;\ 1\ ;\ 3-c)$. Tam giác ABC vuông tại C khi và chỉ khi $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = 0$ hay $-2-3+(-1-c)(3-c) = 0$.

Vậy $c^2 - 2c - 8 = 0$, do đó $c = 4$ hoặc $c = -2$.

Ta có hai điểm thoả mãn yêu cầu là $C_1 = (0\ ;\ 0\ ;\ 4)$ và $C_2 = (0\ ;\ 0\ ;\ -2)$.

c) Hình chiếu của điểm $A(1\ ;\ -3\ ;\ -1)$ trên mp(Oyz) là $A' = (0\ ;\ -3\ ;\ -1)$, hình chiếu của điểm B trên mp(Oyz) là $B' = (0\ ;\ 1\ ;\ 3)$. Vì $\overrightarrow{A'B'} = (0; 4; 4)$ nên đường thẳng $A'B'$ có phương trình

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + t \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

d) Mặt cầu cần tìm có tâm I nằm trên mặt phẳng (Oxy) nên $I = (a\ ;\ b\ ;\ 0)$. Mặt cầu đi qua O, A, B nên $OI = AI = BI$. Như vậy :

$$\begin{cases} OI^2 = AI^2 \\ OI^2 = BI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = (1-a)^2 + (-3-b)^2 + 1 \\ a^2 + b^2 = (-2-a)^2 + (1-b)^2 + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 6b + 11 = 0 \\ 4a - 2b + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{53}{10} \\ b = -\dfrac{18}{5}. \end{cases}$$

Suy ra mặt cầu có tâm : $I\left(-\dfrac{53}{10}\ ;\ -\dfrac{18}{5}; 0\right)$ và có bán kính

$$r = OI = \sqrt{\left(\frac{-53}{10}\right)^2 + \left(-\frac{18}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4105}{100}} = \sqrt{\frac{821}{20}}.$$

Vậy mặt cầu có phương trình $\left(x + \dfrac{53}{10}\right)^2 + \left(y + \dfrac{18}{5}\right)^2 + z^2 = \dfrac{821}{20}$.