§3. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

Chúng ta biết rằng một tam giác được hoàn toàn xác định nếu biết một số yếu tố, chẳng hạn biết ba cạnh, hoặc hai cạnh và góc xen giữa hai cạnh đó.

Như vậy giữa các cạnh và các góc của một tam giác có một mối liên hệ xác định nào đó mà ta sẽ gọi là *các hệ thức lượng trong tam giác*. Trong phần này chúng ta sẽ nghiên cứu những hệ thức đó và các ứng dụng của chúng.

Đối với tam giác ABC ta thường kí hiệu : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

△1 Tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH = h$ và có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi $BH = c'$ và $CH = b'$ (h.2.11). Hãy điền vào các ô trống trong các hệ thức sau đây để được các hệ thức lượng trong tam giác vuông :

$a^2 = b^2 + \boxed{\dots}$

$b^2 = a \times \boxed{\dots}$

$c^2 = a \times \boxed{\dots}$

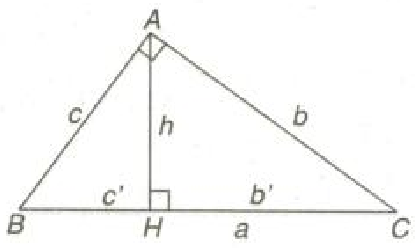
$h^2 = b' \times \boxed{\dots}$

$ah = b \times \boxed{\dots}$

$$\frac{1}{\boxed{\dots}} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$\sin B = \cos C = \frac{\boxed{\dots}}{a}$; $\sin C = \cos B = \frac{\boxed{\dots}}{a}$

$\tan B = \cot C = \frac{\boxed{\dots}}{c}$; $\cot B = \tan C = \frac{\boxed{\dots}}{b}$.

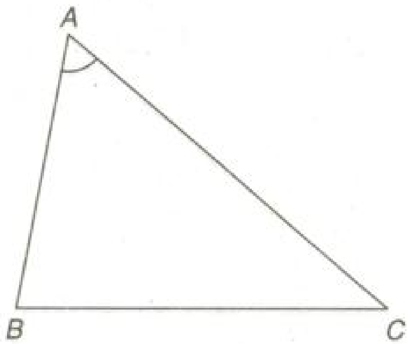


Hình 2.11

Trước tiên ta tìm hiểu hai hệ thức lượng cơ bản trong tam giác bất kì là định lí côsin và định lí sin.

1. Định lí côsin

a) Bài toán. Trong tam giác ABC cho biết hai cạnh AB, AC và góc A, hãy tính cạnh BC (hình 2.12).



Hình 2.12

GIẢI

Ta có $BC^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2$

$$= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

$$BC^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2|\overrightarrow{AC}|.|\overrightarrow{AB}|\cos A.$$

Vậy ta có $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC.AB.\cos A$

nên $\quad BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC.AB.\cos A}$.

Từ kết quả của bài toán trên ta suy ra định lí sau đây :

b) Định lí côsin

Trong tam giác ABC bất kì với BC = a, CA = b, AB = c ta có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cosA\,;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cosB\,;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cosC.$$

2 Hãy phát biểu định lí côsin bằng lời.

3 Khi *ABC* là tam giác vuông, định lí côsin trở thành định lí quen thuộc nào ?

Từ định lí côsin ta suy ra :

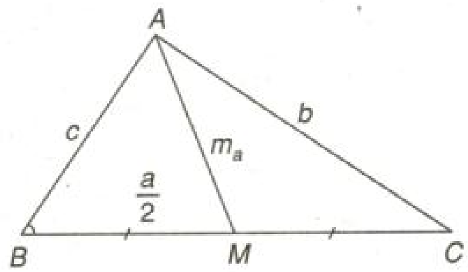
Hệ quả

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\,;$$
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\,;$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

c) Áp dụng. Tính độ dài đường trung tuyến của tam giác.

Cho tam giác *ABC* có các cạnh $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$. Gọi m_a, m_b và m_c là độ dài các đường trung tuyến lần lượt vẽ từ các đỉnh *A*, *B* và *C* của tam giác. Ta có :

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}\,;$$
$$m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}\,;$$
$$m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$



Hình 2.13

Thật vậy, gọi M là trung điểm của cạnh BC, áp dụng định lí côsin vào tam giác AMB ta có :

$$m_a^2 = c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2c.\frac{a}{2}.\cos B = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac\cos B$$

Vì $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ nên ta suy ra :

$$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac.\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Chứng minh tương tự ta có :

$$m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

4 Cho tam giác ABC có $a = 7$ cm, $b = 8$ cm và $c = 6$ cm. Hãy tính độ dài đường trung tuyến m_a của tam giác ABC đã cho.

d) Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có các cạnh $AC = 10$ cm, $BC = 16$ cm và góc $\widehat{C} = 110^\circ$. Tính cạnh AB và các góc A, B của tam giác đó.

GIẢI

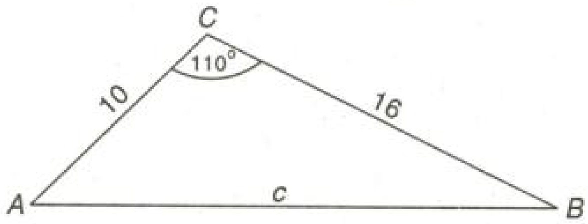
Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Theo định lí côsin ta có :

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \\ &= 16^2 + 10^2 - 2.16.10.\cos 110^\circ \end{aligned}$$

$$c^2 \approx 465,44.$$

Vậy $c \approx \sqrt{465,44} \approx 21,6$ (cm).



Hình 2.14

Theo hệ quả định lí côsin ta có :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx \frac{10^2 + (21,6)^2 - 16^2}{2.10.(21,6)} \approx 0,7188.$$

Suy ra $\widehat{A} \approx 44^\circ 2'$, $\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) \approx 25^\circ 58'$.

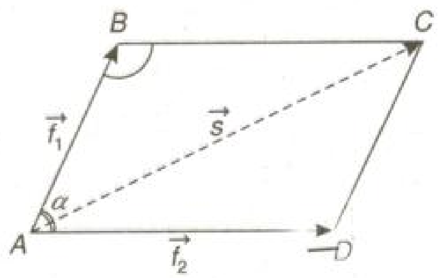
Ví dụ 2. Hai lực $\overrightarrow{f_1}$ và $\overrightarrow{f_2}$ cho trước cùng tác dụng lên một vật và tạo thành góc nhọn $\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}\right) = \alpha$. Hãy lập công thức tính cường độ của hợp lực $\vec{s}$.

GIẢI

Đặt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{f_2}$ và vẽ hình bình hành *ABCD* (h.2.15).

Khi đó $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2} = \vec{s}$.

Vậy $\left|\vec{s}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2}\right|$.



Hình 2.15

Theo định lí côsin đối với tam giác *ABC* ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos B,$$

hay $$\left|\vec{s}\right|^2 = \left|\overrightarrow{f_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{f_2}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{f_1}\right|.\left|\overrightarrow{f_2}\right|.\cos(180^\circ - \alpha).$$

Do đó $$\left|\vec{s}\right| = \sqrt{\overrightarrow{f_1}^2 + \overrightarrow{f_2}^2 + 2\left|\overrightarrow{f_1}\right|.\left|\overrightarrow{f_2}\right|.\cos\alpha}.$$

2. Định lí sin

5 Cho tam giác *ABC* vuông ở *A* nội tiếp trong đường tròn bán kính *R* và có *BC* = a, *CA* = *b*, *AB* = *c*. Chứng minh hệ thức :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Đối với tam giác *ABC* bất kì ta cũng có hệ thức trên. Hệ thức này được gọi là *định lí sin* trong tam giác.

a) Định lí sin

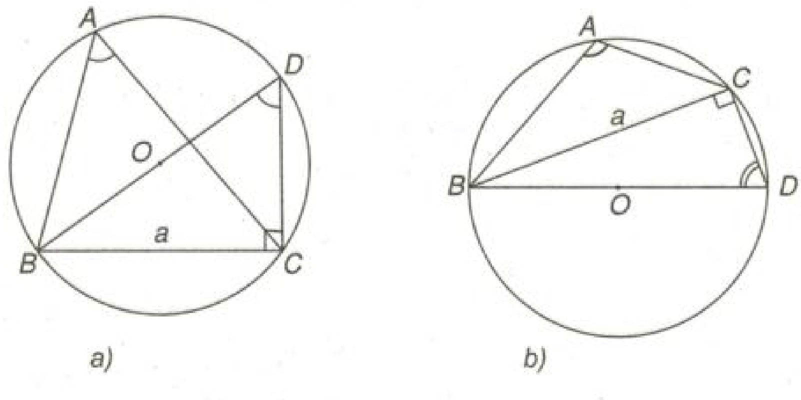
Trong tam giác ABC bất kì với BC = a, CA = b, AB = c và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, ta có :

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.}$$

CHỨNG MINH. Ta chứng minh hệ thức $\frac{a}{\sin A} = 2R$. Xét hai trường hợp :

• Nếu góc A nhọn, ta vẽ đường kính BD của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và khi đó vì tam giác BCD vuông tại C nên ta có $BC = BD.\sin D$ hay $a = 2R.\sin D$ (h.2.16a).

Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ vì đó là hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BC}$. Do đó $a = 2R.\sin A$ hay $\frac{a}{\sin A} = 2R.$



Hình 2.16

• Nếu góc A tù, ta cũng vẽ đường kính BD của đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC (h.2.16b). Tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn tâm O nên $\widehat{D} = 180^{\circ} - \widehat{A}$. Do đó $\sin D = \sin(180^{\circ} - A)$. Ta cũng có $BC = BD.\sin D$ hay $a = BD.\sin A$.

Vậy $a = 2R\sin A$ hay $\frac{a}{\sin A} = 2R.$

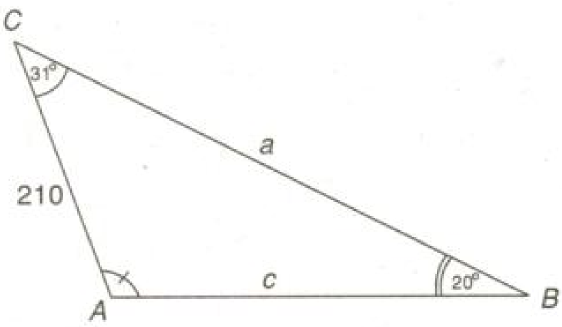
Các đẳng thức $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$ và $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ được chứng minh tương tự.

Vậy ta có $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

6 Cho tam giác đều *ABC* có cạnh bằng *a*. Hãy tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

b) Ví dụ. Cho tam giác *ABC* có $\widehat{B} = 20^o$, $\widehat{C} = 31^o$ và cạnh $b = 210$ cm. Tính $\widehat{A}$, các cạnh còn lại và bán kính *R* của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

GIẢI



Hình 2.17

Ta có $\widehat{A} = 180^o - (20^o + 31^o)$, do đó $\widehat{A} = 129^o$ (h.2.17).

Mặt khác theo định lí sin ta có : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ (1)

Từ (1) suy ra $a = \dfrac{b\sin A}{\sin B} = \dfrac{210.\sin 129^o}{\sin 20^o} \approx 477{,}2$ (cm).

$$c = \dfrac{b\sin C}{\sin B} = \dfrac{210.\sin 31^o}{\sin 20^o} \approx 316{,}2 \text{ (cm)}.$$

$$R = \dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{477{,}2}{2.\sin 129^o} \approx 307{,}02 \text{ (cm)}.$$

3. Công thức tính diện tích tam giác

Ta kí hiệu h_a, h_b và h_c là các đường cao của tam giác ABC lần lượt vẽ từ các đỉnh A, B, C và S là diện tích tam giác đó.

△7 Hãy viết các công thức tính diện tích tam giác theo một cạnh và đường cao tương ứng.

Cho tam giác ABC có các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác và $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi của tam giác.

Diện tích S của tam giác ABC được tính theo một trong các công thức sau

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B\ ; \qquad (1)$$

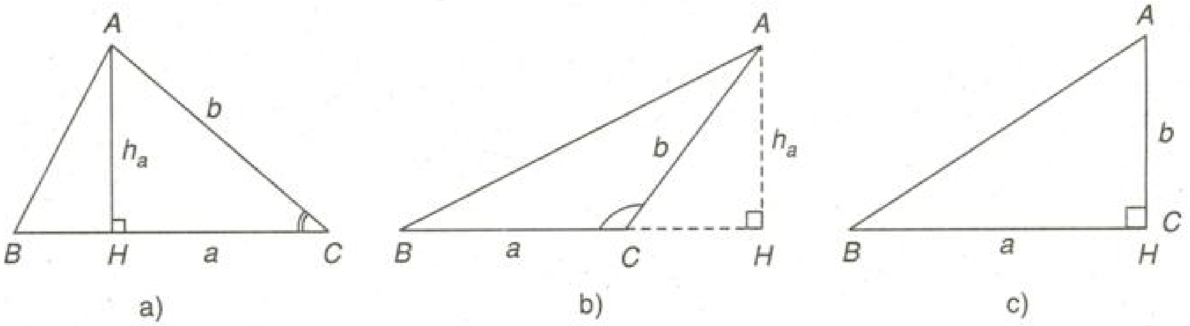
$$S = \frac{abc}{4R}\ ; \qquad (2)$$

$$S = pr\ ; \qquad (3)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(công thức Hê-rông).} \qquad (4)$$

Ta chứng minh công thức (1).

Ta đã biết $S = \frac{1}{2}ah_a$ với $h_a = AH = AC\sin C = b\sin C$ (kể cả $\widehat{C}$ nhọn, tù hay vuông) (h.2.18).



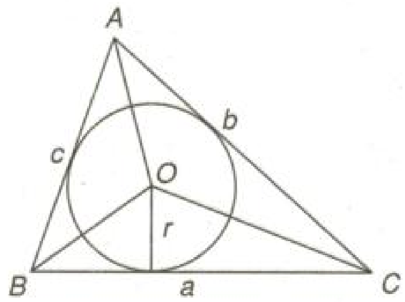
Hình 2.18

Do đó $S = \frac{1}{2}ab\sin C$.

Các công thức $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ và $S = \frac{1}{2}ca\sin B$ được chứng minh tương tự.

Δ8 Dựa vào công thức (1) và định lí sin, hãy chứng minh $S = \frac{abc}{4R}$.

Δ9 Chứng minh công thức $S = pr$ (h.2.19).



Hình 2.19

Ta thừa nhận công thức Hê-rông.

Ví dụ 1. Tam giác ABC có các cạnh $a = 13$ m, $b = 14$ m và $c = 15$ m.

a) Tính diện tích tam giác ABC ;

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

GIẢI

a) Ta có $p = \frac{1}{2}(13 + 14 + 15) = 21$. Theo công thức Hê-rông ta có :

$$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84 \text{ (m}^2\text{)}.$$

b) Áp dụng công thức $S = pr$ ta có $r = \frac{S}{p} = \frac{84}{21} = 4$.

Vậy đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính là $r = 4$ m.

Từ công thức $S = \frac{abc}{4R}$,

ta có $$R = \frac{abc}{4S} = \frac{13.14.15}{336} = 8{,}125 \text{ (m)}.$$

Ví dụ 2. Tam giác ABC có cạnh $a = 2\sqrt{3}$, cạnh $b = 2$ và $\widehat{C} = 30^o$. Tính cạnh c, góc A và diện tích tam giác đó.

GIẢI

Theo định lí côsin ta có

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 12 + 4 - 2.2\sqrt{3}.2.\frac{\sqrt{3}}{2} = 4.$$

Vậy $c = 2$ và tam giác ABC có $AB = AC = 2$. Ta suy ra $\widehat{B} = \widehat{C} = 30^o$.

Do đó $\widehat{A} = 120^o$.

Ta có $S = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}.2\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3}$ (đơn vị diện tích).

4. Giải tam giác và ứng dụng vào việc đo đạc

a) Giải tam giác

Giải tam giác là tìm một số yếu tố của tam giác khi cho biết các yếu tố khác.

Hình 2.20. Giác kế dùng để ngắm và đo đạc

Muốn giải tam giác ta thường sử dụng các hệ thức đã được nêu lên trong định lí côsin, định lí sin và các công thức tính diện tích tam giác.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC biết cạnh $a = 17,4$ m, $\widehat{B} = 44^o30'$ và $\widehat{C} = 64^o$. Tính góc $\widehat{A}$ và các cạnh b, c.

GIẢI

Ta có $\widehat{A} = 180^o - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^o - (44^o30' + 64^o) = 71^o30'$.

Theo định lí sin ta có $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$,

do đó $$b = \frac{a\sin B}{\sin A} \approx \frac{17,4.0,7009}{0,9483} \approx 12,9 \text{ (m)},$$

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} \approx \frac{17,4.0,8988}{0,9483} \approx 16,5 \text{ (m)}.$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có cạnh $a = 49,4$ cm, $b = 26,4$ cm và $\widehat{C} = 47^o20'$. Tính cạnh c, $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$.

GIẢI

Theo định lí côsin ta có

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$\approx (49,4)^2 + (26,4)^2 - 2.49,4.26,4.0,6777 \approx 1369,66.$$

Vậy $c \approx \sqrt{1369,66} \approx 37$ (cm).

Ta có $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx \dfrac{697 + 1370 - 2440}{2.26,4.37} \approx -0,191$.

Như vậy $\widehat{A}$ là góc tù và ta có $\widehat{A} \approx 101^o$.

Do đó $\widehat{B} = 180^o - (\widehat{A} + \widehat{C}) \approx 180^o - (101^o + 47^o20') = 31^o40'$.

Vậy $\widehat{B} \approx 31^o40'$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có cạnh $a = 24$ cm, $b = 13$ cm và $c = 15$ cm. Tính diện tích S của tam giác và bán kính r của đường tròn nội tiếp.

GIẢI

Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{169+225-576}{2.13.15} \approx -0,4667,$$

như vậy $\widehat{A}$ là góc tù và ta tính được $\widehat{A} \approx 117^o49' \Rightarrow \sin A \approx 0,88$.

Ta có $S = \frac{1}{2}bc\sin A \approx \frac{1}{2}.13.15.0,88 = 85,8$ (cm^2).

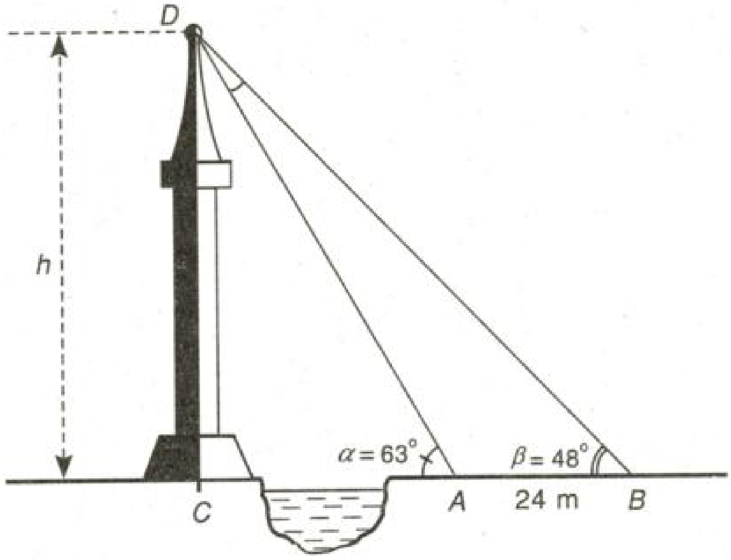
Áp dụng công thức $S = pr$ ta có $r = \frac{S}{p}$. Vì $p = \frac{24+13+15}{2} = 26$ nên

$$r \approx \frac{85,8}{26} = 3,3 \text{ (cm)}.$$

b) Ứng dụng vào việc đo đạc

Bài toán 1. Đo chiều cao của một cái tháp mà không thể đến được chân tháp.

Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo khoảng cách AB và các góc $\widehat{CAD}$, $\widehat{CBD}$. Chẳng hạn ta đo được $AB = 24$ m, $\widehat{CAD} = \alpha = 63^o$, $\widehat{CBD} = \beta = 48^o$. Khi đó chiều cao h của tháp được tính như sau :



Hình 2.21

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABD ta có

$$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin D}.$$

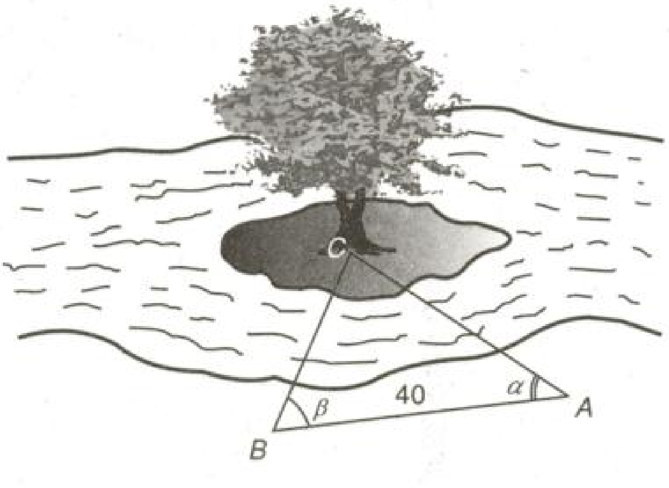
Ta có $\alpha = \widehat{D} + \beta$ nên $\widehat{D} = \alpha - \beta = 63^{\circ} - 48^{\circ} = 15^{\circ}$.

Do đó $AD = \dfrac{AB\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{24\sin 48^{\circ}}{\sin 15^{\circ}} \approx 68,91$.

Trong tam giác vuông ACD ta có $h = CD = AD\sin\alpha \approx 61,4$ (m).

Bài toán 2. Tính khoảng cách từ một địa điểm trên bờ sông đến một gốc cây trên một cù lao ở giữa sông.

Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C. Ta đo khoảng cách AB, góc $\widehat{CAB}$ và $\widehat{CBA}$. Chẳng hạn ta đo được $AB = 40$ m, $\widehat{CAB} = \alpha = 45^{\circ}$, $\widehat{CBA} = \beta = 70^{\circ}$.



Hình 2.22

Khi đó khoảng cách AC được tính như sau :

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC, ta có

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \quad \text{(h.2.22)}.$$

Vì $\sin C = \sin(\alpha+\beta)$ nên $AC = \dfrac{AB\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{40.\sin 70^{\circ}}{\sin 115^{\circ}} \approx 41{,}47$ (m).

Vậy $AC \approx 41{,}47$(m).

Câu hỏi và bài tập

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{B} = 58^{\circ}$ và cạnh $a = 72$ cm. Tính $\widehat{C}$, cạnh b, cạnh c và đường cao h_a.

2. Cho tam giác ABC biết các cạnh $a = 52{,}1$ cm, $b = 85$ cm và $c = 54$ cm. Tính các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$.

3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^{\circ}$, cạnh $b = 8$ cm và $c = 5$ cm. Tính cạnh a, và các góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ của tam giác đó.

4. Tính diện tích S của tam giác có số đo các cạnh lần lượt là 7, 9 và 12.

5. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^{\circ}$. Tính cạnh BC cho biết cạnh $AC = m$ và $AB = n$.

6. Tam giác ABC có các cạnh $a = 8$ cm, $b = 10$ cm và $c = 13$ cm.
a) Tam giác đó có góc tù không ?
b) Tính độ dài trung tuyến MA của tam giác ABC đó.

7. Tính góc lớn nhất của tam giác ABC biết
a) Các cạnh $a = 3$ cm, $b = 4$ cm và $c = 6$ cm ;
b) Các cạnh $a = 40$ cm, $b = 13$ cm và $c = 37$ cm.

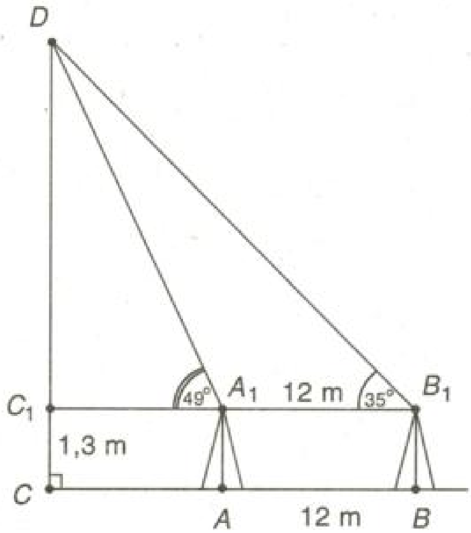
8. Cho tam giác ABC biết cạnh $a = 137{,}5$ cm, $\widehat{B} = 83^{\circ}$ và $\widehat{C} = 57^{\circ}$. Tính góc A, bán kính R của đường tròn ngoại tiếp, cạnh b và c của tam giác.

9. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = b$, $BD = m$ và $AC = n$. Chứng minh rằng $m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$.

10. Hai chiếc tàu thuỷ P và Q cách nhau 300 m. Từ P và Q thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $\widehat{BPA} = 35^o$ và $\widehat{BQA} = 48^o$. Tính chiều cao của tháp.

11. Muốn đo chiều cao của Tháp Chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận (h.2.23), người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách AB = 12 m cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế (h.2.24). Chân của giác kế có chiều cao h = 1,3 m. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được $\widehat{DA_1C_1} = 49^o$ và $\widehat{DB_1C_1} = 35^o$. Tính chiều cao CD của tháp đó.

Hình 2.23



Hình 2.24

Bạn có biết

Người ta đã đo khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trăng như thế nào ?

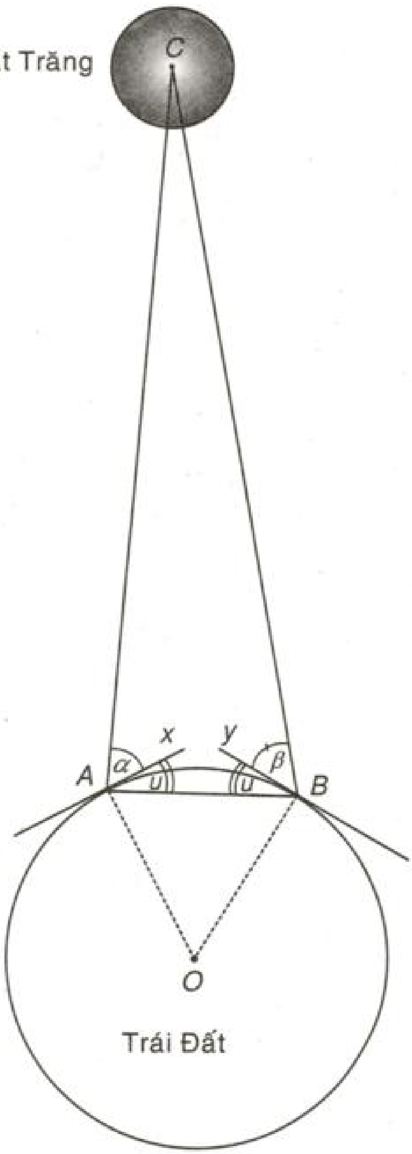
Loài người đã biết được khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trăng cách đây khoảng hai ngàn năm với một độ chính xác tuyệt vời là vào khoảng 384 000 km. Sau đó khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trăng đã được xác lập một cách chắc chắn vào năm 1751 do một nhà thiên văn người Pháp là Giô-dep La-lăng (*Joseph Lalande*, 1732-1807) và một nhà toán học người Pháp là Ni-cô-la La-cay (*Nicolas Lacaille*, 1713-1762). Hai ông đã phối hợp tổ chức đứng ở hai địa điểm rất xa nhau, một người ở Bec-lin gọi là điểm *A*, còn người kia ở Mũi Hảo Vọng (*Bonne-Espérance*) một mũi đất ở cực nam châu Phi, gọi là điểm *B* (h. 2.25). Gọi *C* là một điểm trên Mặt Trăng. Từ *A* và *B* người ta đo và tính được các góc *A*, *B* và cạnh *AB* của tam giác *ABC*.

Trong mặt phẳng (*ABC*), gọi tia *Ax* là đường chân trời vẽ từ đỉnh *A* và tia *By* là đường chân trời vẽ từ đỉnh *B*. Kí hiệu $\alpha = \widehat{CAx}$, $\beta = \widehat{CBy}$.

Gọi *O* là tâm Trái Đất, ta có :

$$u = \widehat{xAB} = \widehat{yBA} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}.$$

Tam giác *ABC* có $\widehat{A} = \alpha + u$, $\widehat{B} = \beta + u$.



Hình 2.25

Vì biết độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ nên ta tính được góc *AOB* và do đó tính được độ dài cạnh *AB*. Tam giác *ABC* được xác định vì biết "góc - cạnh - góc" của tam giác đó. Từ đó ta có thể tính được chiều cao *CH* của tam giác *ABC* là khoảng cách cần tìm. Người ta nhận thấy rằng khoảng cách này gần bằng mười lần độ dài xích đạo của Trái Đất ($\approx 10 \times 40\ 000$ km).