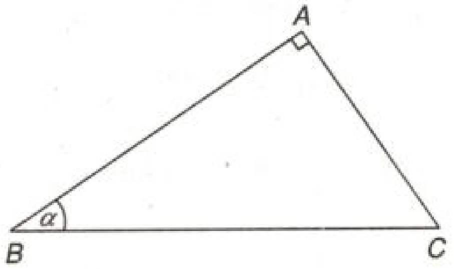
§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ 0° ĐẾN 180°

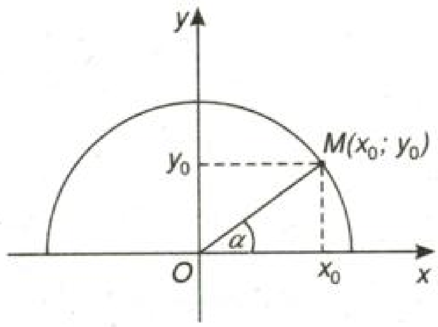
△1 Tam giác ABC vuông tại A có góc nhọn $\widehat{ABC} = \alpha$. Hãy nhắc lại định nghĩa các tỉ số lượng giác của góc nhọn α đã học ở lớp 9.



Hình 2.1

△2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, nửa đường tròn tâm O nằm phía trên trục hoành bán kính $R = 1$ được gọi là *nửa đường tròn đơn vị* (h.2.2). Nếu cho trước một góc nhọn α thì ta có thể xác định một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Giả sử điểm M có toạ độ $(x_0 ; y_0)$.

Hãy chứng tỏ rằng $\sin\alpha = y_0$, $\cos\alpha = x_0$, $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$, $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}$.

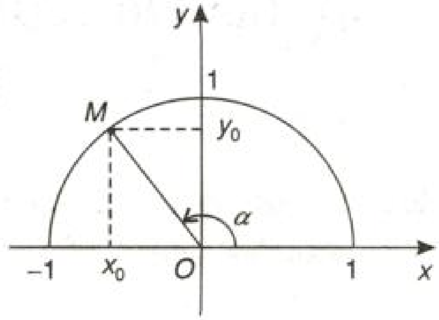


Hình 2.2

Mở rộng khái niệm tỉ số lượng giác đối với góc nhọn cho những góc α bất kì với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, ta có định nghĩa sau đây :

1. Định nghĩa

Với mỗi góc α ($0^o \le \alpha \le 180^o$) ta xác định một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị (h.2.3) sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ và giả sử điểm M có toạ độ $M(x_0\ ;\ y_0)$. Khi đó ta định nghĩa :



Hình 2.3

- sin của góc α là y_0, kí hiệu $\sin\alpha = y_0$;
- côsin của góc α là x_0, kí hiệu $\cos\alpha = x_0$;
- tang của góc α là $\frac{y_0}{x_0}$ $(x_0 \neq 0)$, kí hiệu $\tan\alpha = \frac{y_0}{x_0}$;
- côtang của góc α là $\frac{x_0}{y_0}$ $(y_0 \neq 0)$, kí hiệu $\cot\alpha = \frac{x_0}{y_0}$.

Các số $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các *giá trị lượng giác của góc α.*

Ví dụ. Tìm các giá trị lượng giác của góc 135^o.

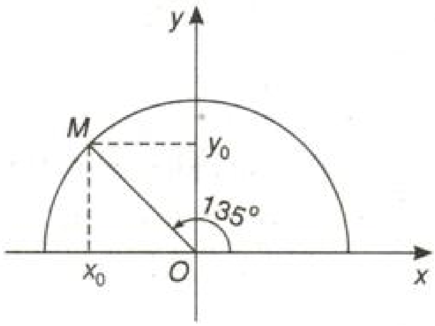
Lấy điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 135^o$. Khi đó ta có $\widehat{yOM} = 45^o$. Từ đó ta suy ra toạ độ của điểm M là $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (h.2.4).

Vậy $\sin 135^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 135^o = -1$; $\cot 135^o = -1$.

Chú ý. • Nếu α là góc tù thì $\cos\alpha < 0$, $\tan\alpha < 0$, $\cot\alpha < 0$.

- $\tan\alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 90^o$, $\cot\alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 0^o$ và $\alpha \neq 180^o$.

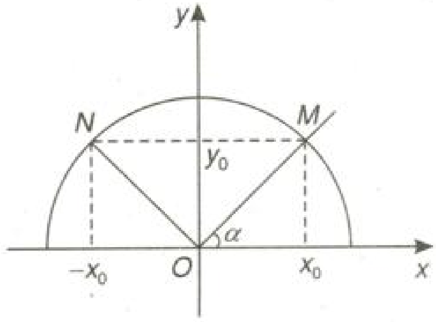


Hình 2.4

2. Tính chất

Trên hình 2.5 ta có dây cung NM song song với trục Ox và nếu $\widehat{xOM} = \alpha$ thì $\widehat{xON} = 180^\circ - \alpha$. Ta có $y_M = y_N = y_0$, $x_M = -x_N = x_0$. Do đó

$$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$$
$$\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$$
$$\tan\alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$$
$$\cot\alpha = -\cot(180^\circ - \alpha).$$



Hình 2.5

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Giá trị lượng giác của các góc bất kì có thể tìm thấy trên bảng số hoặc trên máy tính bỏ túi.

Sau đây là giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt mà chúng ta cần ghi nhớ.

Bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Giá trị lượng giác \ α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	‖	0
$\cot\alpha$	‖	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	‖

Trong bảng, kí hiệu "‖" để chỉ giá trị lượng giác không xác định.

☞ *Chú ý*. Từ giá trị lượng giác của các góc đặc biệt đã cho trong bảng và tính chất trên, ta có thể suy ra giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt khác.

Chẳng hạn :

$$\sin 120^o = \sin(180^o - 60^o) = \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 135^o = \cos(180^o - 45^o) = -\cos 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

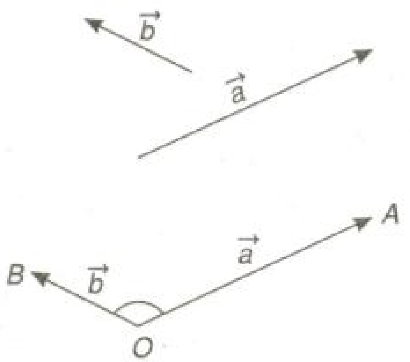
△3 Tìm các giá trị lượng giác của các góc 120^o, 150^o.

4. Góc giữa hai vectơ

a) Định nghĩa

*Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0^o đến 180^o được gọi là **góc giữa hai vectơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$ (h.2.6). Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^o$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.*

b) *Chú ý*. Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.



Hình 2.6

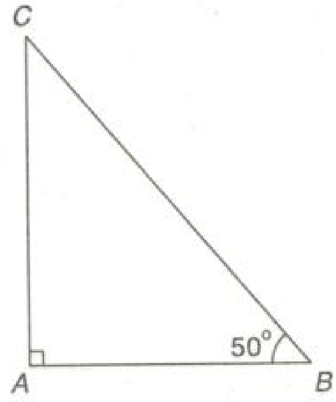
△4 Khi nào góc giữa hai vectơ bằng 0^o ? Khi nào góc giữa hai vectơ bằng 180^o ?

c) Ví dụ. Cho tam giác ABC vuông tại A và có góc $\widehat{B} = 50^o$ (h.2.7). Khi đó :

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 50^o$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^o$,

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 40^o$, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = 40^o$,

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 140^o$, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = 90^o$.



Hình 2.7

5. Sử dụng máy tính bỏ túi để tính giá trị lượng giác của một góc

Ta có thể sử dụng các loại máy tính bỏ túi để tính giá trị lượng giác của một góc, chẳng hạn đối với máy CASIO fx – 500MS cách thực hiện như sau :

a) Tính các giá trị lượng giác của góc α

Sau khi mở máy ấn phím $\boxed{\text{MODE}}$ nhiều lần để màn hình hiện lên dòng chữ ứng với các số sau đây :

Deg	Rad	Gra
1	2	3

Sau đó ấn phím $\boxed{1}$ để xác định đơn vị đo góc là "độ" và tính giá trị lượng giác của góc.

• Tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ và $\tan\alpha$.

Ví dụ 1. Tính sin $63^o\ 52'\ 41''$.

Ấn liên tiếp các phím sau đây :

$$\boxed{\sin}\ 63\ \boxed{o,,,}\ 52\ \boxed{o,,,}\ 41\ \boxed{o,,,}\ \boxed{=}$$

Ta được kết quả là : $\sin 63^o\ 52'\ 41'' \approx 0,897859012$.

Để tính $\cos\alpha$ và $\tan\alpha$ ta cũng làm như trên, chỉ thay việc ấn phím $\boxed{\sin}$ bằng phím $\boxed{\cos}$ hay $\boxed{\tan}$.

b) Xác định độ lớn của góc khi biết giá trị lượng giác của góc đó

Sau khi mở máy và chọn đơn vị đo góc, để tính góc x khi biết các giá trị lượng giác của góc đó ta làm như ví dụ sau.

Ví dụ 2. Tìm x biết $\sin x = 0{,}3502$.

Ta ấn liên tiếp các phím sau đây :

$$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sin}\ 0.3502\ \boxed{=}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\circ,,,}$$

và được kết quả là : $x \approx 20^{o}29'58''$.

Muốn tìm x khi biết $\cos x$, $\tan x$ ta làm tương tự như trên, chỉ thay phím $\boxed{\sin}$ bằng phím $\boxed{\cos}$, $\boxed{\tan}$.

Câu hỏi và bài tập

1. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có :

a) $\sin A = \sin(B + C)$;　　　　b) $\cos A = -\cos(B + C)$.

2. Cho AOB là tam giác cân tại O có $OA = a$ và có các đường cao OH và AK. Giả sử $\widehat{AOH} = \alpha$. Tính AK và OK theo a và α.

3. Chứng minh rằng :

a) $\sin 105^{o} = \sin 75^{o}$;

b) $\cos 170^{o} = -\cos 10^{o}$;

c) $\cos 122^{o} = -\cos 58^{o}$.

4. Chứng minh rằng với mọi góc $\alpha\,(0^{o} \leq \alpha \leq 180^{o})$ ta đều có $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

5. Cho góc x, với $\cos x = \dfrac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức : $P = 3\sin^2 x + \cos^2 x$.

6. Cho hình vuông $ABCD$. Tính :

$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$, $\sin(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$, $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.