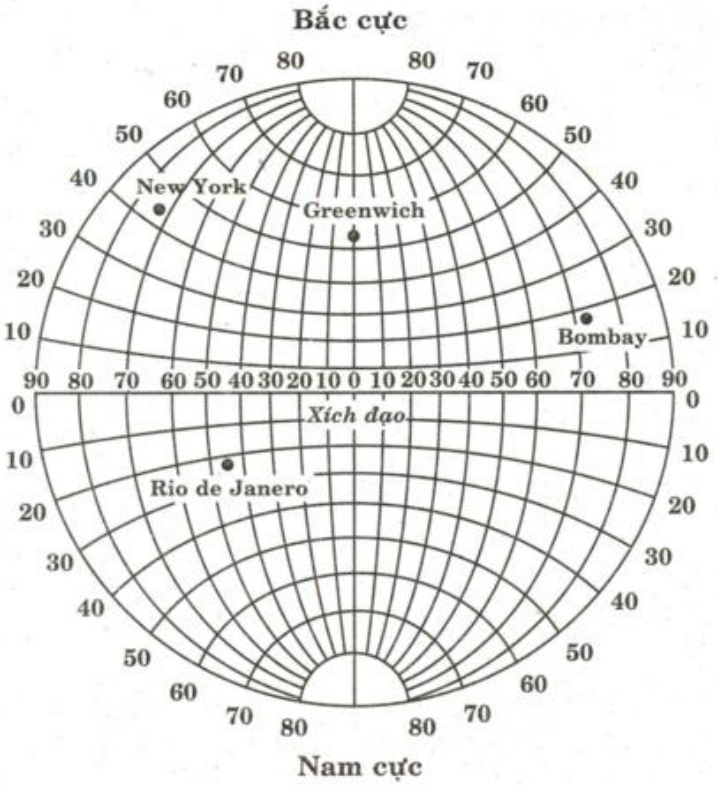
§4. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ



Với mỗi cặp số chỉ kinh độ và vĩ độ người ta xác định được một điểm trênTrái Đất.

1. Trục và độ dài đại số trên trục

a) *Trục toạ độ* (hay gọi tắt là *trục*) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O gọi là *điểm gốc* và một vectơ đơn vị $\vec{e}$.

Ta kí hiệu trục đó là $(O\ ;\ \vec{e})$ (h.1.20)

Hình 1.20

b) Cho M là một điểm tuỳ ý trên trục $(O\ ;\ \vec{e})$. Khi đó có duy nhất một số k sao cho $\overrightarrow{OM} = k\vec{e}$. *Ta gọi số k đó là toạ độ của điểm M đối với trục đã cho.*

c) Cho hai điểm A và B trên trục $(O\ ;\ \vec{e})$. Khi đó có duy nhất số a sao cho $\overrightarrow{AB} = a\vec{e}$. Ta gọi số a đó là *độ dài đại số của vectơ* $\overrightarrow{AB}$ *đối với trục đã cho* và kí hiệu $a = \overline{AB}$.

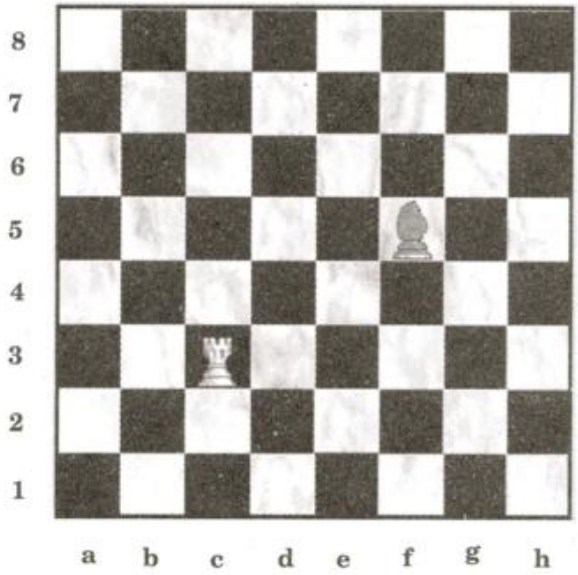
Nhận xét. Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} = AB$, còn nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} = -AB$.

Nếu hai điểm A và B trên trục $(O\ ;\ \vec{e})$ có toạ độ lần lượt là a và b thì $\overline{AB} = b - a$.

2. Hệ trục toạ độ

Trong mục này ta sẽ xây dựng khái niệm hệ trục toạ độ để xác định vị trí của điểm và của vectơ trên mặt phẳng.

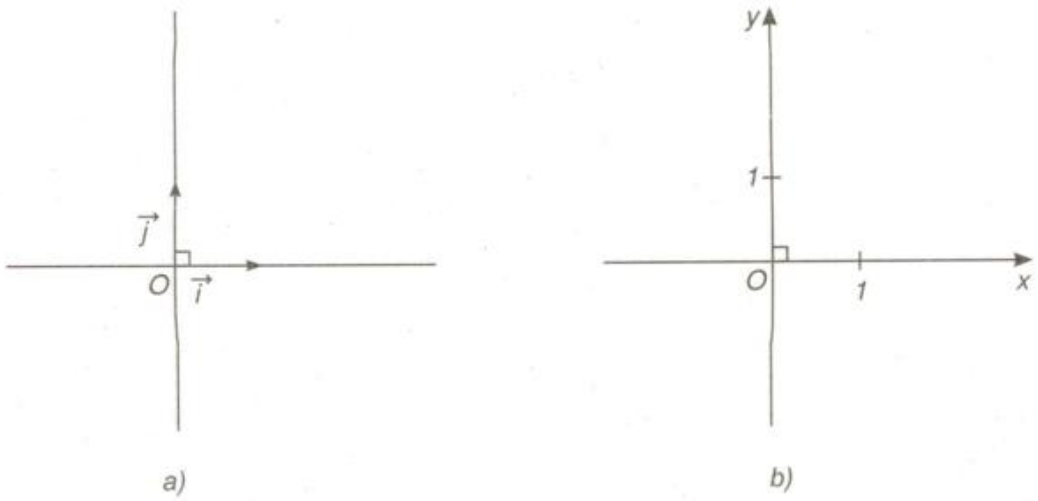
1 Hãy tìm cách xác định vị trí quân xe và quân mã trên bàn cờ vua (h.1.21)



Hình 1.21

a) Định nghĩa

Hệ trục toạ độ $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ *gồm hai trục* $(O\ ;\ \vec{i})$ *và* $(O\ ;\ \vec{j})$ *vuông góc với nhau. Điểm gốc O chung của hai trục gọi là* ***gốc toạ độ****. Trục* $(O\ ;\ \vec{i})$ *được gọi là* ***trục hoành*** *và kí hiệu là Ox, trục* $(O\ ;\ \vec{j})$ *được gọi là* ***trục tung*** *và kí hiệu là Oy. Các vectơ* $\vec{i}$ *và* $\vec{j}$ *là các vectơ đơn vị trên Ox và Oy và* $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$*. Hệ trục toạ độ* $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ *còn được kí hiệu là Oxy (h.1.22)*

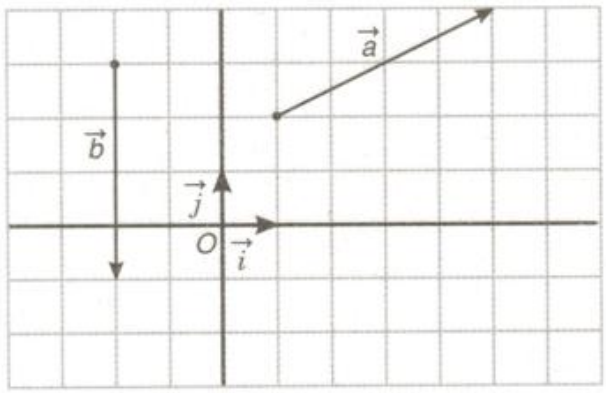


Hình 1.22

Mặt phẳng mà trên đó đã cho một hệ trục toạ độ Oxy được gọi là *mặt phẳng toạ độ Oxy* hay gọi tắt là *mặt phẳng Oxy*.

b) Toạ độ của vectơ

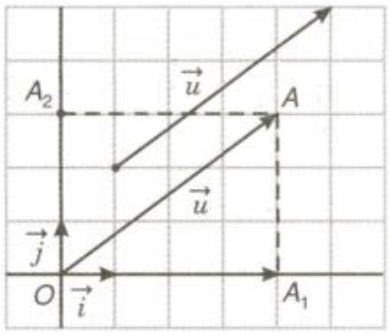
2 Hãy phân tích các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ theo hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ trong hình (h.1.23)



Hình 1.23

Trong mặt phẳng Oxy cho một vectơ $\vec{u}$ tuỳ ý. Vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ và gọi A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên Ox và Oy (h.1.24). Ta có $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ và cặp số duy nhất $(x\ ;\ y)$ để $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$. Như vậy $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Cặp số $(x ; y)$ duy nhất đó được gọi là *toạ độ của vectơ* $\vec{u}$ đối với hệ toạ độ Oxy và viết $\vec{u} = (x ; y)$ hoặc $\vec{u}(x ; y)$. Số thứ nhất x gọi là *hoành độ*, số thứ hai y gọi là *tung độ* của vectơ $\vec{u}$.



Hình 1.24

Như vậy

$$\boxed{\vec{u} = (x ; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}}$$

Nhận xét. Từ định nghĩa toạ độ của vectơ, ta thấy *hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau.*

Nếu $\vec{u} = (x ; y)$, $\vec{u}' = (x' ; y')$ thì

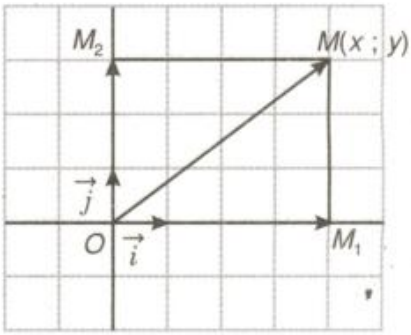
$$\boxed{\vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}}$$

Như vậy, mỗi vectơ được hoàn toàn xác định khi biết toạ độ của nó.

c) Toạ độ của một điểm

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho một điểm M tuỳ ý. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ đối với hệ trục Oxy được gọi là *toạ độ của điểm M* đối với hệ trục đó (h.1.25).

Như vậy, cặp số $(x ; y)$ là toạ độ của điểm M khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = (x ; y)$. Khi đó ta viết $M(x ; y)$ hoặc $M = (x ; y)$. Số x được gọi là *hoành độ*, còn số y được gọi là *tung độ* của điểm M. Hoành độ của điểm M còn được kí hiệu là x_M, tung độ của điểm M còn được kí hiệu là y_M.

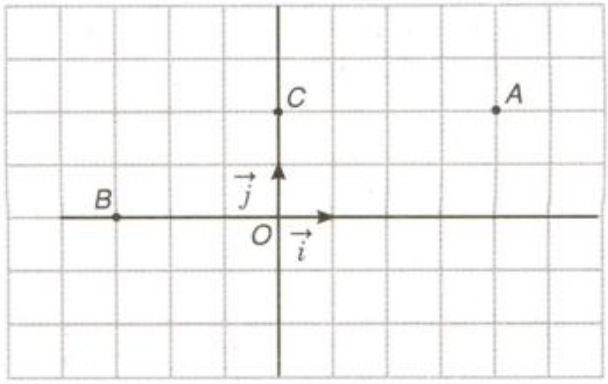


Hình 1.25

$$\boxed{M = (x ; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}}$$

Chú ý rằng, nếu $MM_1 \perp Ox$, $MM_2 \perp Oy$ thì $x = \overline{OM_1}$, $y = \overline{OM_2}$.

3 Tìm toạ độ của các điểm A, B, C trong hình 1.26. Cho ba điểm $D(-2 ; 3)$, $E(0 ; -4)$, $F(3 ; 0)$. Hãy vẽ các điểm D, E, F trên mặt phẳng Oxy.



Hình 1.26

d) Liên hệ giữa toạ độ của điểm và toạ độ của vectơ trong mặt phẳng

Cho hai điểm $A(x_A ; y_A)$ và $B(x_B ; y_B)$. Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A \ ; \ y_B - y_A).$$

4 Hãy chứng minh công thức trên.

3. Toạ độ của các vectơ $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $k\vec{u}$

Ta có các công thức sau :

Cho $\vec{u} = (u_1 ; u_2)$, $\vec{v} = (v_1 ; v_2)$. Khi đó :

$$\vec{u}+\vec{v} = (u_1 + v_1 ; u_2 + v_2) ;$$

$$\vec{u}-\vec{v} = (u_1 - v_1 ; u_2 - v_2) ;$$

$$k\vec{u} = (ku_1 ; ku_2), k \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 1. Cho $\vec{a} = (1 ; -2)$, $\vec{b} = (3 ; 4)$, $\vec{c} = (5 ; -1)$. Tìm toạ độ vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Ta có $2\vec{a} = (2 ; -4)$, $2\vec{a} + \vec{b} = (5 ; 0)$, $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (0 ; 1)$.

Vậy $\vec{u} = (0 ; 1)$.

Ví dụ 2. Cho $\vec{a} = (1 ; -1)$, $\vec{b} = (2 ; 1)$. Hãy phân tích vectơ $\vec{c} = (4 ; -1)$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Giả sử $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b} = (k + 2h ; -k + h)$

Ta có $\begin{cases} k + 2h = 4 \\ -k + h = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ h = 1. \end{cases}$

Vậy $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

Nhận xét. *Hai vectơ $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$ với $\vec{v} \neq \vec{0}$ cùng phương khi và chỉ khi có một số k sao cho $u_1 = kv_1$ và $u_2 = kv_2$.*

4. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng. Toạ độ của trọng tâm tam giác

a) Cho đoạn thẳng AB có $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$. Ta dễ dàng chứng minh được toạ độ trung điểm $I(x_I ; y_I)$ của đoạn thẳng AB là :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, \; y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

5. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{OG}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}$. Từ đó hãy tính toạ độ của G theo toạ độ của A, B và C.

b) Cho tam giác ABC có $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$, $C(x_C ; y_C)$. Khi đó toạ độ của trọng tâm $G(x_G ; y_G)$ của tam giác ABC được tính theo công thức :

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Ví dụ. Cho $A(2 ; 0)$, $B(0 ; 4)$, $C(1 ; 3)$. Tìm toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng AB và toạ độ của trọng tâm G của tam giác ABC.

Ta có $x_I = \dfrac{2+0}{2} = 1$, $y_I = \dfrac{0+4}{2} = 2$;

$x_G = \dfrac{2+0+1}{3} = 1$, $y_G = \dfrac{0+4+3}{3} = \dfrac{7}{3}$.

Câu hỏi và bài tập

1. Trên trục $(O ; \vec{e})$ cho các điểm A, B, M, N có toạ độ lần lượt là $-1, 2, 3, -2$.

a) Hãy vẽ trục và biểu diễn các điểm đã cho trên trục ;

b) Tính độ dài đại số của $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN}$. Từ đó suy ra hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN}$ ngược hướng.

2. Trong mặt phẳng toạ độ các mệnh đề sau đúng hay sai ?

a) $\vec{a} = (-3 ; 0)$ và $\vec{i} = (1 ; 0)$ là hai vectơ ngược hướng ;

b) $\vec{a} = (3 ; 4)$ và $\vec{b} = (-3 ; -4)$ là hai vectơ đối nhau ;

c) $\vec{a} = (5 ; 3)$ và $\vec{b} = (3 ; 5)$ là hai vectơ đối nhau ;

d) Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau.

3. Tìm toạ độ của các vectơ sau :

a) $\vec{a} = 2\vec{i}$; b) $\vec{b} = -3\vec{j}$;

c) $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$; d) $\vec{d} = 0,2\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$.

4. Trong mặt phẳng Oxy. Các khẳng định sau đúng hay sai ?

a) Toạ độ của điểm A là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OA}$;

b) Điểm A nằm trên trục hoành thì có tung độ bằng 0 ;

c) Điểm A nằm trên trục tung thì có hoành độ bằng 0 ;

d) Hoành độ và tung độ của điểm A bằng nhau khi và chỉ khi A nằm trên tia phân giác của góc phần tư thứ nhất.

5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $M(x_0 ; y_0)$.

a) Tìm toạ độ của điểm A đối xứng với M qua trục Ox ;

b) Tìm toạ độ của điểm B đối xứng với M qua trục Oy ;

c) Tìm toạ độ điểm C đối xứng với M qua gốc O.

6. Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-1 ; -2)$, $B(3 ; 2)$, $C(4 ; -1)$. Tìm toạ độ đỉnh D.

7. Các điểm $A'(-4 ; 1)$, $B'(2 ; 4)$ và $C'(2 ; -2)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA và AB của tam giác ABC. Tính toạ độ các đỉnh của tam giác ABC. Chứng minh rằng trọng tâm của các tam giác ABC và $A'B'C'$ trùng nhau.

8. Cho $\vec{a} = (2 ; -2)$, $\vec{b} = (1 ; 4)$. Hãy phân tích vectơ $\vec{c} = (5 ; 0)$ theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.