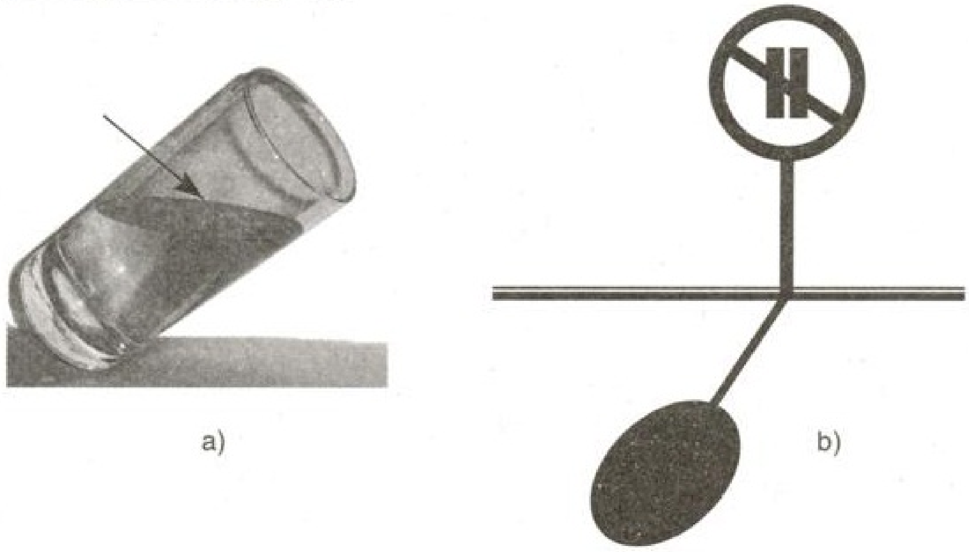
§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

1. Định nghĩa đường elip

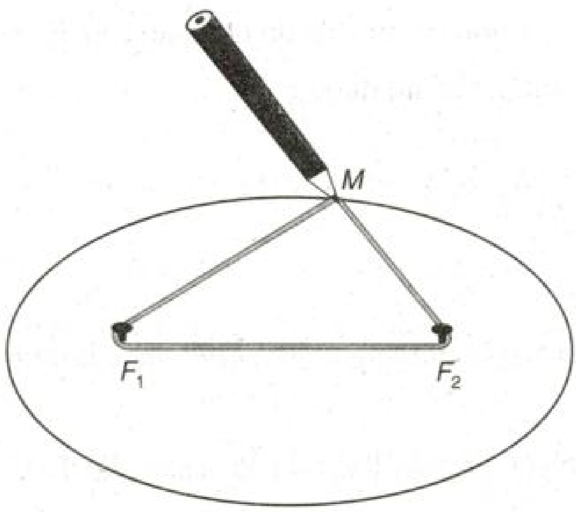


Hình 3.18

1 Quan sát mặt nước trong cốc nước cầm nghiêng (h.3.18a). Hãy cho biết đường được đánh dấu bởi mũi tên có phải là đường tròn hay không ?

2 Hãy cho biết bóng của một đường tròn trên một mặt phẳng (h.3.18b) có phải là một đường tròn hay không ?

Đóng hai chiếc đinh cố định tại hai điểm F_1 và F_2 (h.3.19). Lấy một vòng dây kín không đàn hồi có độ dài lớn hơn $2F_1F_2$. Quàng vòng dây đó qua hai chiếc đinh và kéo căng tại một điểm M nào đó. Đặt đầu bút chì tại điểm M rồi di chuyển sao cho dây luôn căng. Đầu bút chì vạch nên một đường mà ta gọi là đường elip.



Hình 3.19

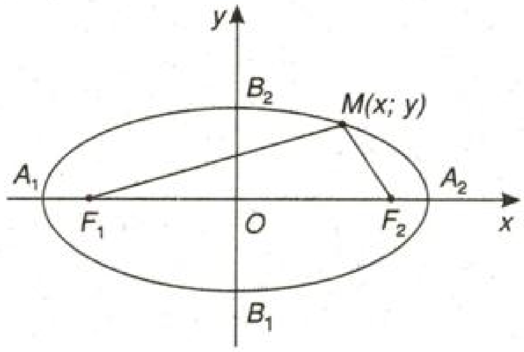
Định nghĩa

*Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi $2a$ lớn hơn F_1F_2. **Elip** là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho*

$$F_1M + F_2M = 2a.$$

*Các điểm F_1 và F_2 gọi là các **tiêu điểm** của elip. Độ dài $F_1F_2 = 2c$ gọi là **tiêu cự** của elip.*

2. Phương trình chính tắc của elip



Hình 3.20

Cho elip (E) có các tiêu điểm F_1 và F_2. Điểm M thuộc elip khi và chỉ khi $F_1M + F_2M = 2a$. Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho $F_1 = (-c\,;0)$ và $F_2 = (c\,;0)$. Khi đó người ta chứng minh được :

$$M(x\,;y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

trong đó $b^2 = a^2 - c^2$.

Phương trình (1) gọi là *phương trình chính tắc* của elip.

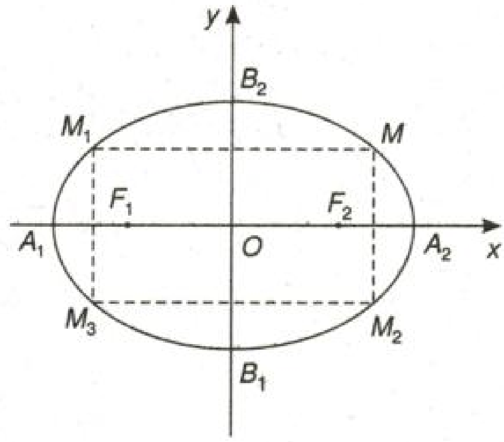
△3 Trong phương trình (1) hãy giải thích vì sao ta luôn đặt được $b^2 = a^2 - c^2$.

3. Hình dạng của elip

Xét elip (E) có phương trình (1) :

a) Nếu điểm $M(x\,;\,y)$ thuộc (E) thì các điểm $M_1(-x\,;\,y)$, $M_2(x\,;\,-y)$ và $M_3(-x\,;\,-y)$ cũng thuộc (E) (h.3.21).

Vậy (E) có các trục đối xứng là Ox, Oy và có tâm đối xứng là gốc O.



Hình 3.21

b) Thay $y = 0$ vào (1) ta có $x = \pm a$, suy ra (E) cắt Ox tại hai điểm $A_1(-a\ ;\ 0)$ và $A_2(a\ ;\ 0)$. Tương tự thay $x = 0$ vào (1) ta được $y = \pm b$, vậy (E) cắt Oy tại hai điểm $B_1(0\ ;\ -b)$ và $B_2(0\ ;\ b)$.

Các điểm A_1, A_2, B_1 và B_2 gọi là *các đỉnh* của elip.

Đoạn thẳng A_1A_2 gọi là *trục lớn*, đoạn thẳng B_1B_2 gọi là *trục nhỏ* của elip.

Ví dụ. Elip (E) : $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{1} = 1$ có các đỉnh là $A_1(-3\ ;\ 0)$, $A_2(3\ ;\ 0)$, $B_1(0\ ;\ -1)$, $B_2(0\ ;\ 1)$ và $A_1A_2 = 6$ là trục lớn còn $B_1B_2 = 2$ là trục nhỏ.

4 Hãy xác định toạ độ các tiêu điểm và vẽ hình elip trong ví dụ trên.

4. Liên hệ giữa đường tròn và đường elip

a) Từ hệ thức $b^2 = a^2 - c^2$ ta thấy nếu tiêu cự của elip càng nhỏ thì b càng gần bằng a, tức là trục nhỏ của elip càng gần bằng trục lớn. Lúc đó elip có dạng gần như đường tròn.

b) Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

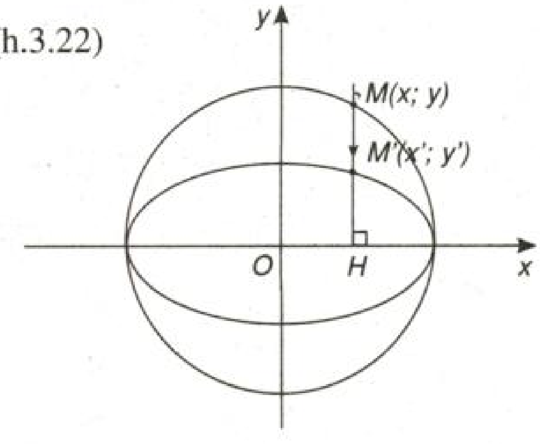
Với mỗi điểm $M(x\ ;\ y)$ thuộc đường tròn ta xét điểm $M'(x'\ ;\ y')$ sao cho

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{b}{a}y \end{cases} \quad (\text{với } 0 < b < a) \text{ (h.3.22)}$$

thì tập hợp các điểm M' có toạ độ thoả mãn phương trình

$\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ là một elip (E).

Khi đó ta nói đường tròn $(\mathscr{C})$ được co thành elip (E).



Hình 3.22

Câu hỏi và bài tập

1. Xác định độ dài các trục, toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh của các elip có phương trình sau :

a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

b) $4x^2+9y^2=1$;

c) $4x^2+9y^2=36$.

2. Lập phương trình chính tắc của elip, biết

a) Độ dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 8 và 6 ;

b) Độ dài trục lớn bằng 10 và tiêu cự bằng 6.

3. Lập phương trình chính tắc của elip trong các trường hợp sau :

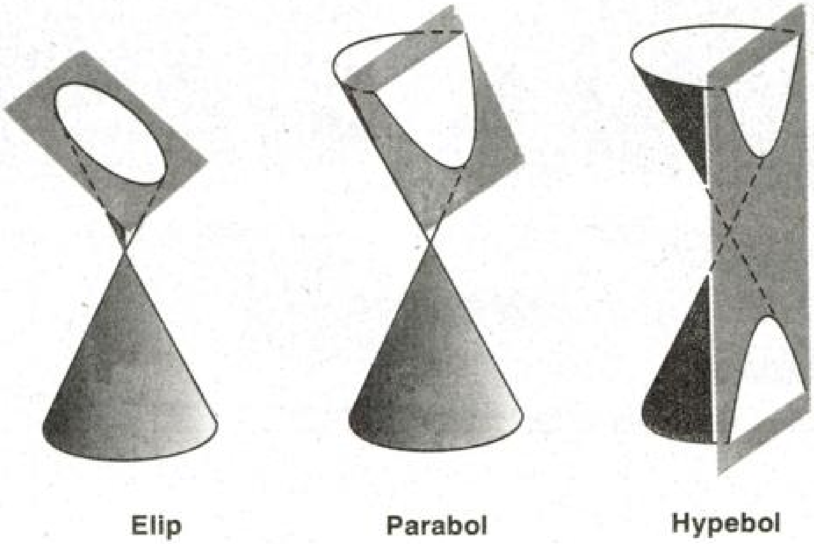
a) Elip đi qua các điểm $M(0\ ;\ 3)$ và $N\left(3\ ;\ -\dfrac{12}{5}\right)$;

b) Elip có một tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3}\ ;\ 0)$ và điểm $M\left(1\ ;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nằm trên elip.

4. Để cắt một bảng hiệu quảng cáo hình elip có trục lớn là 80 cm và trục nhỏ là 40 cm từ một tấm ván ép hình chữ nhật có kích thước 80 cm × 40 cm, người ta vẽ hình elip đó lên tấm ván ép như hình 3.19. Hỏi phải ghim hai cái đinh cách các mép tấm ván ép bao nhiêu và lấy vòng dây có độ dài là bao nhiêu ?

5. Cho hai đường tròn $\mathscr{C}_1(F_1\ ;\ R_1)$ và $\mathscr{C}_2(F_2\ ;\ R_2)$. $\mathscr{C}_1$ nằm trong $\mathscr{C}_2$ và $F_1 \neq F_2$. Đường tròn $\mathscr{C}$ thay đổi luôn tiếp xúc ngoài với $\mathscr{C}_1$ và tiếp xúc trong với $\mathscr{C}_2$. Hãy chứng tỏ rằng tâm M của đường tròn $\mathscr{C}$ di động trên một elip.

Ba đường cônic và quỹ đạo của tàu vũ trụ



Hình 3.23

1. Khi cắt một mặt nón tròn xoay bởi một mặt phẳng không đi qua đỉnh và không vuông góc với trục của mặt nón, người ta nhận thấy ngoài đường elip ra, có thể còn hai loại đường khác nữa là parabol và hypebol (h.3.23). Các đường nói trên thường được gọi là *ba đường cônic* (do gốc tiếng Hi Lạp Konos nghĩa là mặt nón).

2. Dưới đây là vài ví dụ về hình ảnh của ba đường cônic trong đời sống hằng ngày :

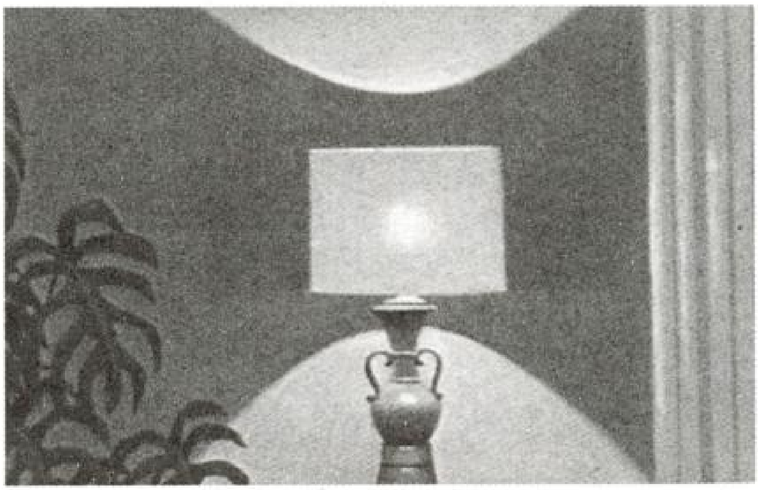
– Bóng của một quả bóng đá trên mặt sân thường có hình elip (h.3.24).

Hình 3.24

– Tia nước từ vòi phun ở công viên thường là đường parabol (h.3.25).

Hình 3.25

– Bóng của đèn ngủ in trên tường có thể là đường hypebol (h.3.26).

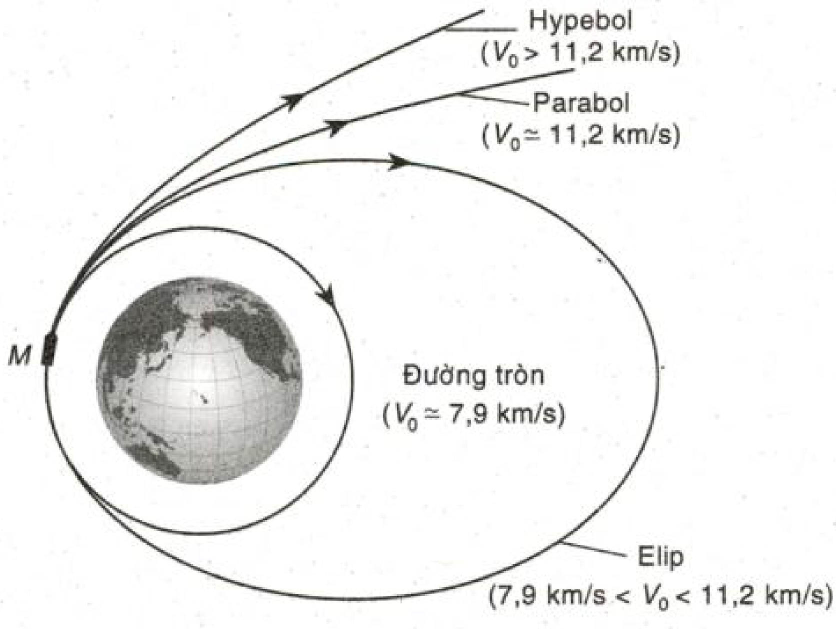


Hình 3.26

3. Tàu vũ trụ được phóng lên từ Trái Đất luôn bay theo những quỹ đạo, quỹ đạo này thường là đường tròn, elip, parabol hoặc hypebol. Hình dạng của quỹ đạo phụ thuộc vào vận tốc của tàu vũ trụ (h.3.27). Ta có bảng tương ứng giữa tốc độ và quỹ đạo như sau.

Tốc độ V_0 của tàu vũ trụ	Hình dạng quỹ đạo tàu vũ trụ
7,9 km/s	đường tròn
7,9 km/s < V_0 < 11,2 km/s	elip
11,2 km/s	Một phần của parabol
V_0 > 11,2 km/s	Một phần của hypebol

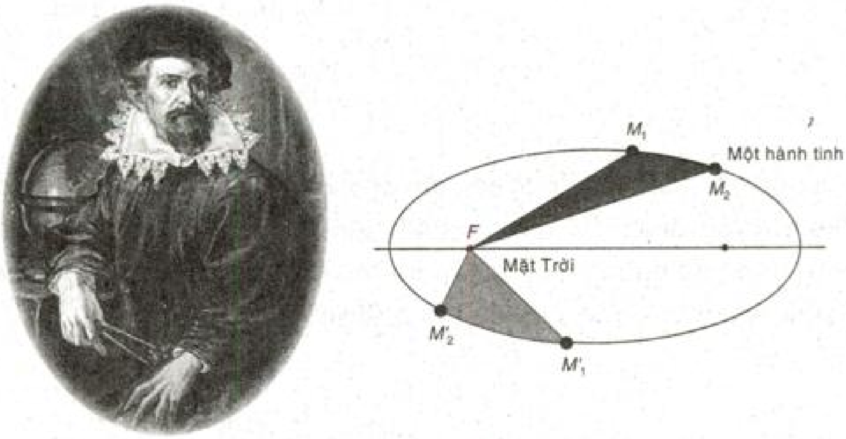
Ngoài ra người ta còn tính được các tốc độ vũ trụ tổng quát, nghĩa là tốc độ của các thiên thể chuyển động đối với các thiên thể khác dưới tác dụng của lực hấp dẫn tương hỗ. Ví dụ để phóng một tàu vũ trụ thoát li được Mặt Trăng trở về Trái Đất thì cần tạo cho tàu một tốc độ ban đầu là 2,38 km/s.



Hình 3.27

Bạn có biết

Giô-han Kê-ple và quy luật chuyển động của các hành tinh



Hình 3.28

Giô-han Kê-ple (*Johannes Kepler*, 1571-1630) là nhà thiên văn người Đức. Ông là một trong những người đã đặt nền móng cho khoa học tự nhiên. Kê-ple sinh ra ở Vu-tem-be (*Wurtemberg*) trong một gia đình nghèo, 15 tuổi theo học trường dòng. Năm 1593 ông tốt nghiệp Học viện Thiên văn và Toán học vào loại xuất sắc và trở thành giáo sư trung học. Năm 1600 ông đến Pra-ha và cùng làm việc với nhà thiên văn nổi tiếng Ti-cô Bra.

Kê-ple nổi tiếng nhờ phát minh ra các định luật chuyển động của các hành tinh :

1. Các hành tinh chuyển động quanh Mặt Trời theo các quỹ đạo là các đường elip mà Mặt Trời là một tiêu điểm.

2. Đoạn thẳng nối từ Mặt Trời đến hành tinh quét được những diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau. Chẳng hạn nếu xem Mặt Trời là tiêu điểm F và nếu trong cùng một khoảng thời gian t, một hành tinh di chuyển từ M_1 đến M_2 hoặc từ M'_1 đến M'_2 thì diện tích hai hình FM_1M_2 và $FM'_1M'_2$ bằng nhau (h.3.28).

3. Nếu gọi T_1, T_2 lần lượt là thời gian để hai hành tinh bất kì bay hết một vòng quanh Mặt Trời và gọi a_1, a_2 lần lượt là độ dài nửa trục lớn của elip quỹ đạo của hai hành tinh trên thì ta luôn có

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}.$$

Các định luật nói trên ngày nay trong thiên văn gọi là ba định luật Kê-ple.