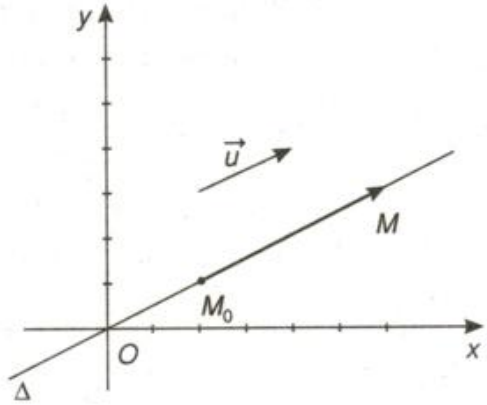
§1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

1 Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng Δ là đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x$.

a) Tìm tung độ của hai điểm M_0 và M nằm trên Δ, có hoành độ lần lượt là 2 và 6.

b) Cho vectơ $\vec{u} = (2 ; 1)$. Hãy chứng tỏ $\overrightarrow{M_0M}$ cùng phương với $\vec{u}$.



Hình 3.2

Định nghĩa

*Vectơ $\vec{u}$ được gọi là **vectơ chỉ phương** của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.*

Nhận xét

– Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì $k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của Δ. Do đó một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương.

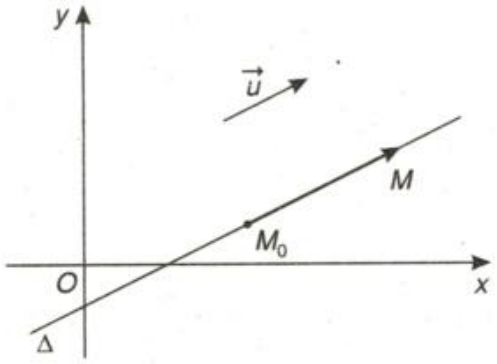
– Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

a) Định nghĩa

Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ và nhận $\vec{u} = (u_1 ; u_2)$ làm vectơ chỉ phương. Với mỗi điểm $M(x ; y)$ bất kì trong mặt phẳng, ta có $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0 ; y - y_0)$. Khi đó

$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}$ cùng phương với $\vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$



Hình 3.3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = tu_1 \\ y - y_0 = tu_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} \quad (1)$$

Hệ phương trình (1) được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng Δ, trong đó t là *tham số*.

Cho t một giá trị cụ thể thì ta xác định được một điểm trên đường thẳng Δ.

2 Hãy tìm một điểm có toạ độ xác định và một vectơ chỉ phương của đường thẳng có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = 5 - 6t \\ y = 2 + 8t. \end{cases}$$

b) Liên hệ giữa vectơ chỉ phương và hệ số góc của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số

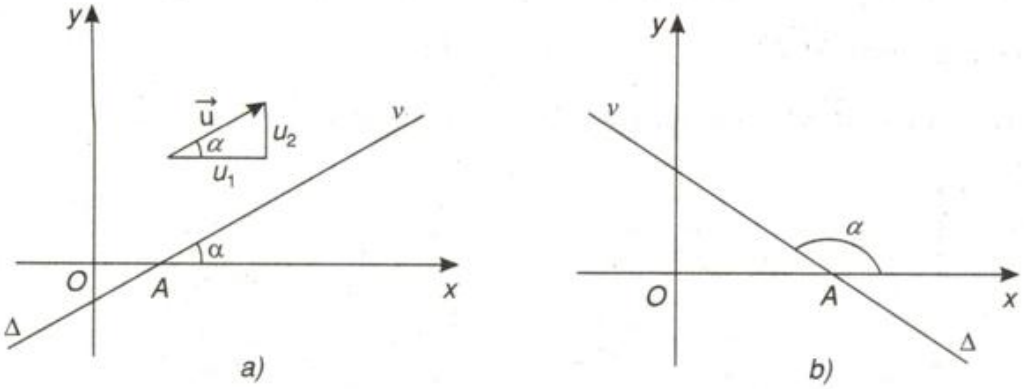
$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2. \end{cases}$$

Nếu $u_1 \neq 0$ thì từ phương trình tham số của Δ ta có

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{u_1} \\ y - y_0 = tu_2 \end{cases}$$

suy ra $y - y_0 = \frac{u_2}{u_1}(x - x_0)$.

Đặt $k = \frac{u_2}{u_1}$ ta được $y - y_0 = k(x - x_0)$.



Hình 3.4

Gọi A là giao điểm của Δ với trục hoành, Av là tia thuộc Δ ở về nửa mặt phẳng toạ độ phía trên (chứa tia Oy). Đặt $\alpha = \widehat{xAv}$, ta thấy $k = \tan\alpha$. Số k chính là *hệ số góc* của đường thẳng Δ mà ta đã biết ở lớp 9.

Như vậy nếu đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1 ; u_2)$ với $u_1 \neq 0$ thì Δ có hệ số góc $k = \frac{u_2}{u_1}$.

3 Tính hệ số góc của đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1 ; \sqrt{3})$.

Ví dụ. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua hai điểm $A(2 ; 3)$ và $B(3 ; 1)$. Tính hệ số góc của d.

GIẢI

Vì d đi qua A và B nên d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1 ; -2)$

Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t. \end{cases}$

Hệ số góc của d là $k = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-2}{1} = -2$.

3. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

4 Cho đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$ và vectơ $\vec{n} = (3 ; -2)$. Hãy chứng tỏ $\vec{n}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của Δ.

Định nghĩa

*Vectơ $\vec{n}$ được gọi là **vectơ pháp tuyến** của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và $\vec{n}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của Δ.*

Nhận xét

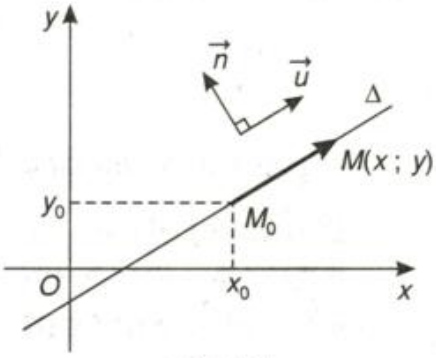
– Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của Δ. Do đó một đường thẳng có vô số vectơ pháp tuyến.

– Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó.

4. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ và nhận $\vec{n}(a ; b)$ làm vectơ pháp tuyến.

Với mỗi điểm $M(x ; y)$ bất kì thuộc mặt phẳng, ta có : $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0 ; y - y_0)$.



Hình 3.5

Khi đó : $M(x ; y) \in \Delta \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + c = 0$$

với $c = -ax_0 - by_0$.

a) Định nghĩa

*Phương trình $ax + by + c = 0$ với a và b không đồng thời bằng 0, được gọi là **phương trình tổng quát** của đường thẳng.*

Nhận xét. Nếu đường thẳng Δ có phương trình là $ax + by + c = 0$ thì Δ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a ; b)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-b ; a)$.

5 Hãy chứng minh nhận xét trên.

b) Ví dụ. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(2 ; 2)$ và $B(4 ; 3)$.

GIẢI

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B nên có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (2 ; 1)$. Từ đó suy ra Δ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-1 ; 2)$. Vậy đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là :

$$(-1).(x - 2) + 2(y - 2) = 0$$

hay $$x - 2y + 2 = 0.$$

6 Hãy tìm toạ độ của vectơ chỉ phương của đường thẳng có phương trình :

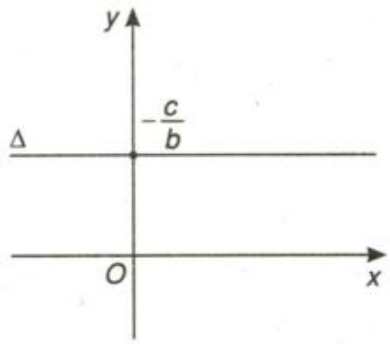
$$3x + 4y + 5 = 0.$$

c) Các trường hợp đặc biệt

Cho đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$ (1)

• Nếu $a = 0$ phương trình (1) trở thành $by + c = 0$ hay $y = -\dfrac{c}{b}$.

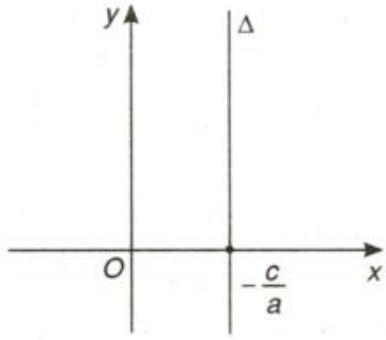
Khi đó đường thẳng Δ vuông góc với trục Oy tại điểm $\left(0 ; -\dfrac{c}{b}\right)$ (h.3.6).



Hình 3.6

• Nếu $b = 0$ phương trình (1) trở thành $ax + c = 0$ hay $x = -\frac{c}{a}$.

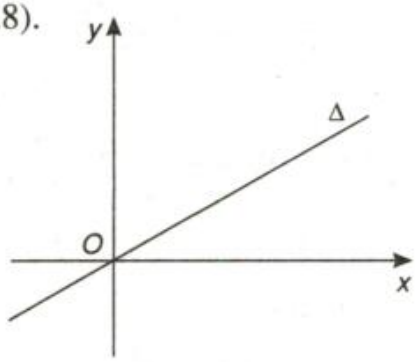
Khi đó đường thẳng Δ vuông góc với trục Ox tại điểm $\left(-\frac{c}{a}\,;\,0\right)$ (h.3.7).



Hình 3.7

• Nếu $c = 0$ phương trình (1) trở thành $ax + by = 0$.

Khi đó đường thẳng Δ đi qua gốc toạ độ O (h.3.8).

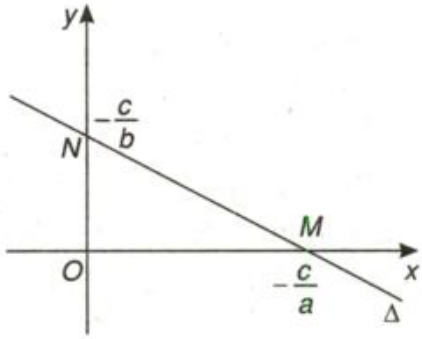


Hình 3.8

• Nếu a, b, c đều khác 0 ta có thể đưa phương trình (1) về dạng

$$\frac{x}{a_0} + \frac{y}{b_0} = 1 \qquad (2)$$

với $a_0 = -\frac{c}{a}$, $b_0 = -\frac{c}{b}$.



Hình 3.9

Phương trình (2) được gọi là *phương trình đường thẳng theo đoạn chắn*, đường thẳng này cắt Ox và Oy lần lượt tại $M(a_0\,;\,0)$ và $N(0\,;\,b_0)$ (h.3.9).

7 Trong mặt phẳng *Oxy*, hãy vẽ các đường thẳng có phương trình sau đây :

$d_1 : x - 2y = 0$;

$d_2 : x = 2$;

$d_3 : y + 1 = 0$;

$d_4 : \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1.$

5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Xét hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình tổng quát lần lượt là

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{và} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Ta có các trường hợp sau :

a) Hệ (I) có một nghiệm $(x_0 ; y_0)$, khi đó Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm $M_0(x_0 ; y_0)$.

b) Hệ (I) có vô số nghiệm, khi đó Δ_1 trùng với Δ_2.

c) Hệ (I) vô nghiệm, khi đó Δ_1 và Δ_2 không có điểm chung, hay Δ_1 song song với Δ_2.

Ví dụ. Cho đường thẳng *d* có phương trình $x - y + 1 = 0$, xét vị trí tương đối của *d* với mỗi đường thẳng sau :

$\Delta_1 : 2x + y - 4 = 0$;

$\Delta_2 : x - y - 1 = 0$;

$\Delta_3 : 2x - 2y + 2 = 0.$

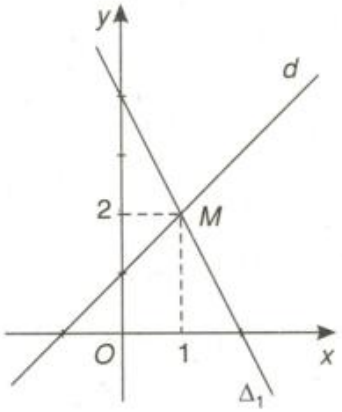
GIẢI

a) Xét d và Δ_1, hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

có nghiệm (1 ; 2).

Vậy d cắt Δ_1 tại $M(1 ; 2)$ (h.3.10).

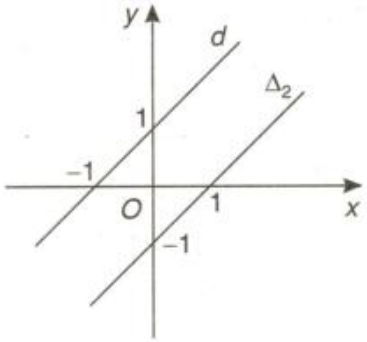


Hình 3.10

b) Xét d và Δ_2, hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy $d \,//\, \Delta_2$ (h.3.11).



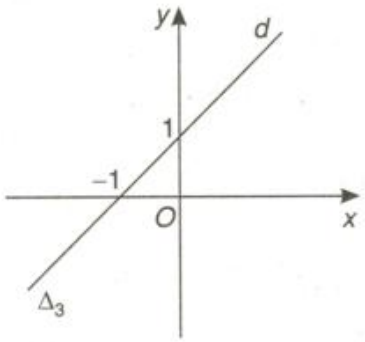
Hình 3.11

c) Xét d và Δ_3, hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 & (1) \\ 2x - 2y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

có vô số nghiệm (vì các hệ số của (1) và (2) tỉ lệ).

Vậy $d \equiv \Delta_3$ (h.3.12).



Hình 3.12

8 Xét vị trí tương đối của đường thẳng $\Delta : x - 2y + 1 = 0$ với mỗi đường thẳng sau :

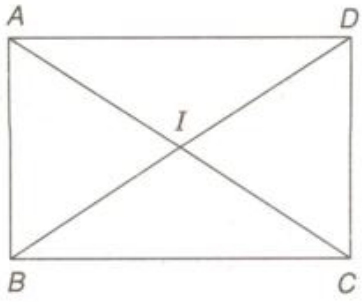
$d_1 : -3x + 6y - 3 = 0$;

$d_2 : y = -2x$;

$d_3 : 2x + 5 = 4y$.

6. Góc giữa hai đường thẳng

9 Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm I và các cạnh $AB = 1$, $AD = \sqrt{3}$. Tính số đo các góc $\widehat{AID}$ và $\widehat{DIC}$.



Hình 3.13

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành bốn góc. Nếu Δ_1 không vuông góc với Δ_2 thì góc nhọn trong số bốn góc đó được gọi là *góc giữa hai đường thẳng* Δ_1 và Δ_2. Nếu Δ_1 vuông góc với Δ_2 thì ta nói góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 90°. Trường hợp Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau thì ta quy ước góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 0°. Như vậy góc giữa hai đường thẳng luôn bé hơn hoặc bằng 90°.

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được kí hiệu là $\left(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}\right)$ hoặc (Δ_1, Δ_2).

Cho hai đường thẳng

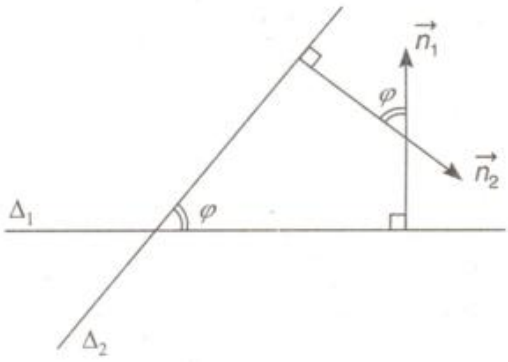
$$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Đặt $\varphi = \left(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}\right)$ thì ta thấy φ bằng hoặc bù với góc giữa $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ trong đó $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của Δ_1 và Δ_2. Vì $\cos\varphi \geq 0$ nên ta suy ra

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}.$$

Vậy

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.}$$



Hình 3.14

☞ ***Chú ý***

- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$
- Nếu Δ_1 và Δ_2 có phương trình $y = k_1x + m_1$ và $y = k_2x + m_2$ thì

$$\boxed{\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1.}$$

7. Công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

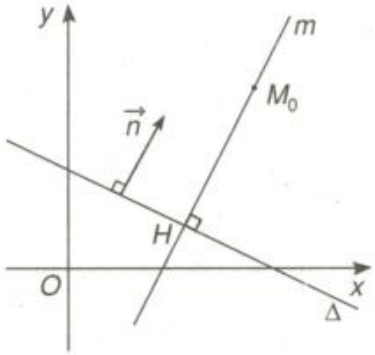
Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng Δ có phương trình $ax + by + c = 0$ và điểm $M_0(x_0 ; y_0)$. ***Khoảng cách*** *từ điểm M_0 đến đường thẳng Δ, kí hiệu là $d(M_0, \Delta)$, được tính bởi công thức*

$$\boxed{d(M_0, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.}$$

CHỨNG MINH

Phương trình tham số của đường thẳng m đi qua $M_0(x_0 ; y_0)$ và vuông góc với đường thẳng Δ là :

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}$$



Hình 3.15

trong đó $\vec{n}(a ; b)$ là vectơ pháp tuyến của Δ.

Giao điểm H của đường thẳng m và Δ ứng với giá trị của tham số là nghiệm t_H của phương trình :

$$a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) + c = 0.$$

Ta có $\quad t_H = -\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$

Vậy điểm $H = (x_0 + t_Ha ; y_0 + t_Hb).$

Từ đó suy ra $d(M_0, \Delta) = M_0H = \sqrt{(x_H - x_0)^2 + (y_H - y_0)^2}$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2)t_H^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

10 Tính khoảng cách từ các điểm $M(-2 ; 1)$ và $O(0 ; 0)$ đến đường thẳng Δ có phương trình $3x - 2y - 1 = 0$.

Câu hỏi và bài tập

1. Lập phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau :

a) d đi qua điểm $M(2 ; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3 ; 4)$;

b) d đi qua điểm $M(-2 ; 3)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (5 ; 1)$.

2. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau :

a) Δ đi qua $M(-5 ; -8)$ và có hệ số góc $k = -3$;

b) Δ đi qua hai điểm $A(2 ; 1)$ và $B(-4 ; 5)$.

3. Cho tam giác ABC, biết $A(1 ; 4)$, $B(3 ; -1)$ và $C(6 ; 2)$.

a) Lập phương trình tổng quát của các đường thẳng AB, BC và CA ;

b) Lập phương trình tổng quát của đường cao AH và trung tuyến AM.

4. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $M(4 ; 0)$ và điểm $N(0 ; -1)$.

5. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d_1 và d_2 sau đây :

a) $d_1 : 4x - 10y + 1 = 0$ và $d_2 : x + y + 2 = 0$;

b) $d_1 : 12x - 6y + 10 = 0$ và $d_2 : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$;

c) $d_1 : 8x + 10y - 12 = 0$ và $d_2 : \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t. \end{cases}$

6. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t. \end{cases}$

Tìm điểm M thuộc d và cách điểm $A(0 ; 1)$ một khoảng bằng 5.

7. Tìm số đo của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình

$$d_1 : 4x - 2y + 6 = 0 \text{ và } d_2 : x - 3y + 1 = 0.$$

8. Tìm khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng trong các trường hợp sau :

a) $A(3 ; 5)$, $\Delta : 4x + 3y + 1 = 0$;

b) $B(1 ; -2)$, $d : 3x - 4y - 26 = 0$;

c) $C(1 ; 2)$, $m : 3x + 4y - 11 = 0$.

9. Tìm bán kính của đường tròn tâm $C(-2 ; -2)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 5x + 12y - 10 = 0$.