§3. TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ

1 Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Xác định độ dài và hướng của vectơ $\vec{a} + \vec{a}$.

1.

Định nghĩa

Cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vectơ $\vec{a}$ với số k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

Ta quy ước $0\vec{a} = \vec{0}$, $k\vec{0} = \vec{0}$.

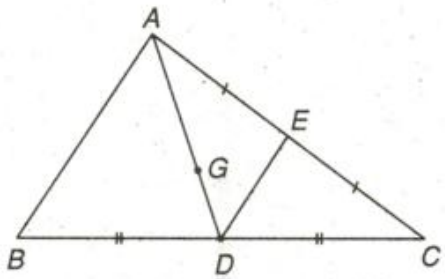
Người ta còn gọi tích của vectơ với một số là *tích của một số với một vectơ.*

Ví dụ 1. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC, D và E lần lượt là trung điểm của BC và AC. Khi đó ta có (h1.13)

$$\overrightarrow{GA} = (-2)\overrightarrow{GD},$$

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{GD},$$

$$\overrightarrow{DE} = \left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}.$$



Hình 1.13

2. Tính chất

Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k, ta có

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;

$(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;

$h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$;

$1.\vec{a} = \vec{a}$, $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$.

2 Tìm vectơ đối của các vectơ $k\vec{a}$ và $3\vec{a} - 4\vec{b}$.

3. Trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

a) Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm M ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

b) Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với mọi điểm M ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

△3 Hãy sử dụng mục 5 của §2 để chứng minh các khẳng định trên.

4. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}\neq\vec{0}$) cùng phương là có một số k để $\vec{a}=k\vec{b}$.

Thật vậy, nếu $\vec{a}=k\vec{b}$ thì hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

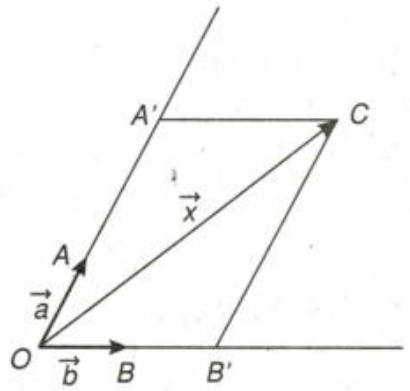
Ngược lại, giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương. Ta lấy $k=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng và lấy $k=-\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng. Khi đó ta có $\vec{a}=k\vec{b}$.

Nhận xét. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

5. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Cho $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ là hai vectơ không cùng phương và $\vec{x}=\overrightarrow{OC}$ là một vectơ tùy ý. Kẻ $CA' \parallel OB$ và $CB' \parallel OA$ (h. 1.14). Khi đó $\vec{x}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$. Vì $\overrightarrow{OA'}$ và $\vec{a}$ là hai vectơ cùng phương nên có số h để $\overrightarrow{OA'}=h\vec{a}$. Vì $\overrightarrow{OB'}$ và $\vec{b}$ cùng phương nên có số k để $\overrightarrow{OB'}=k\vec{b}$.

Vậy $\vec{x}=h\vec{a}+k\vec{b}$.



Hình 1.14

Khi đó ta nói vectơ $\vec{x}$ được phân tích (hay còn được gọi là *biểu thị*) theo hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Một cách tổng quát người ta chứng minh được mệnh đề quan trọng sau đây :

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

Bài toán sau cho ta cách phân tích trong một số trường hợp cụ thể.

Bài toán. Cho tam giác *ABC* với trọng tâm *G*. Gọi *I* là trung điểm của đoạn *AG* và *K* là điểm trên cạnh *AB* sao cho $AK = \frac{1}{5}AB$.

a) Hãy phân tích $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CK}$ theo $\vec{a} = \overrightarrow{CA}, \vec{b} = \overrightarrow{CB}$;

b) Chứng minh ba điểm *C*, *I*, *K* thẳng hàng.

GIẢI

a) Gọi *AD* là trung tuyến của tam giác *ABC* (h. 1.15). Ta có

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}.$$

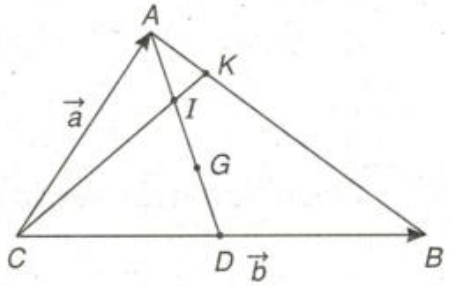
Do đó

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a};$$

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{5}(\vec{b} - \vec{a});$$

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} = \vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a};$$

$$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AK} = \vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} - \frac{1}{5}\vec{a} = \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{4}{5}\vec{a}.$$



Hình 1.15

b) Từ tính toán trên ta có $\overrightarrow{CK} = \frac{6}{5}\overrightarrow{CI}$. Vậy ba điểm *C*, *I*, *K* thẳng hàng.

Câu hỏi và bài tập

1. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}.$$

2. Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AK}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BM}$.

3. Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

4. Gọi AM là trung tuyến của tam giác ABC và D là trung điểm của đoạn AM. Chứng minh rằng

a) $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$;

b) $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OD}$, với O là điểm tuỳ ý.

5. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD của tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng :

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.$$

6. Cho hai điểm phân biệt A và B. Tìm điểm K sao cho

$$3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}.$$

7. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

8. Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

9. Cho tam giác đều ABC có O là trọng tâm và M là một điểm tuỳ ý trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M đến BC, AC, AB. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$

Bạn có biết

Tỉ lệ vàng

Ơ-clit *(Euclide)*, nhà toán học của mọi thời đại đã từng nói đến "tỉ lệ vàng" trong tác phẩm bất hủ của ông mang tên "Những nguyên tắc cơ bản". Theo Ơ-clit, điểm *I* trên đoạn *AB* được gọi là điểm *chia đoạn AB theo tỉ lệ vàng* nếu thoả mãn

$$\frac{AI}{IB} = \frac{AB}{AI}. \qquad (1)$$

Hình 1.16

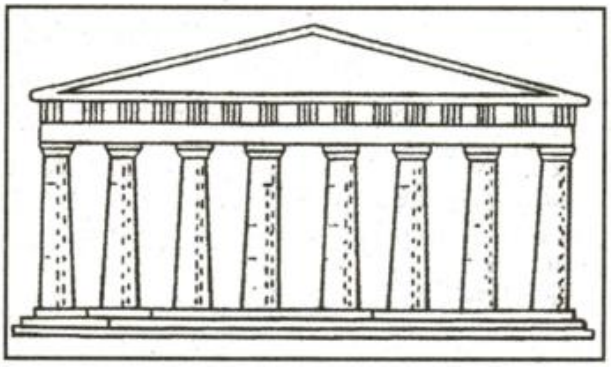
Đặt $x = \frac{AI}{IB} = \frac{AB}{AI}$ ta có $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{IB}$. Số *x* đó được gọi là *tỉ lệ vàng* và điểm *I* được gọi là *điểm vàng* của đoạn *AB*.

Để tính *x*, ta có thể đặt *IB* = 1. Từ (1) ta có

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}, \quad \text{hay} \quad x^2 - x - 1 = 0,$$

tức là $$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803.$$

Với tỉ lệ vàng người ta có thể tạo nên một hình chữ nhật đẹp, cân đối và gây hứng thú cho nhiều nhà hội hoạ kiến trúc. Ví dụ, khi đến tham quan đền Pác-tê-nông ở A-ten (Hi Lạp) người ta thấy kích thước các hình hình học trong đền phần lớn chịu ảnh hưởng của tỉ lệ vàng. Nhà tâm lí học người Đức Phít-nê *(Fichner)* đã quan sát và đo hàng nghìn đồ vật thường dùng trong đời sống như ô cửa sổ, trang giấy viết, bìa sách... và so sánh kích thước giữa chiều dài và chiều ngang của chúng thì thấy tỉ số gần bằng tỉ lệ vàng.

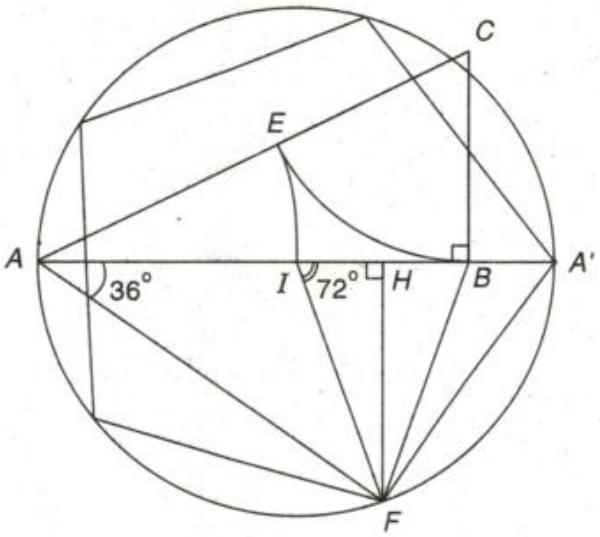


Hình1.17. Đền Pác-tê-nông và đường nét kiến trúc của nó.

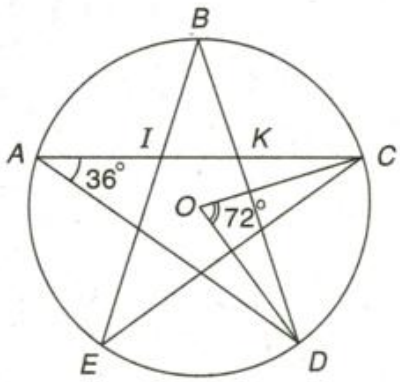
Để dựng điểm vàng I của đoạn $AB = a$ ta làm như sau :

Vẽ tam giác ABC vuông tại B, với $BC = \frac{a}{2}$. Đường tròn tâm C bán kính $\frac{a}{2}$ cắt AC tại E. Đường tròn tâm A bán kính AE cắt AB tại I.

Ta có $AC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ và $AE = AI = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$. Do đó $\frac{AB}{AI} = \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.



Hình 1.18



Hình 1.19

Sử dụng điểm vàng I ta có thể dựng được góc 72°, từ đó dựng được ngũ giác đều cũng như ngôi sao năm cánh như sau :

Ta dựng đường tròn tâm I bán kính IA cắt trung trực của IB tại F ta được $\widehat{FAB} = 36^o$ và $\widehat{ABF} = 72^o$ (h.1.18).

Một ngũ giác đều nội tiếp đường tròn trên có hai đỉnh liên tiếp là F và điểm xuyên tâm đối A' của A. Từ đó ta dựng được ngay ba đỉnh còn lại của ngũ giác đều.

Cần lưu ý rằng trên ngôi sao năm cánh trong hình 1.19 thì tỉ số $\frac{AI}{IK} = \frac{AK}{AI}$ chính là tỉ lệ vàng. Ngôi sao vàng năm cánh của Quốc kì nước ta được dựng theo tỉ số này.