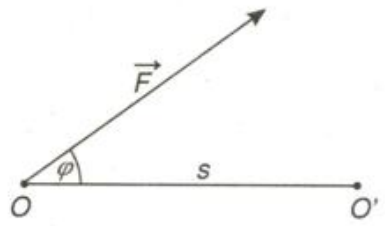
§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Trong vật lí, ta biết rằng nếu có một lực $\vec{F}$ tác động lên một vật tại điểm O và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường $s = OO'$ thì công A của lực $\vec{F}$ được tính theo công thức :



Hình 2.8

$A = |\vec{F}|.|\overrightarrow{OO'}|\cos\varphi$ (h.2.8)

trong đó $|\vec{F}|$ là cường độ của lực $\vec{F}$ tính bằng Niutơn (viết tắt là N), $|\overrightarrow{OO'}|$ là độ dài của vectơ $\overrightarrow{OO'}$ tính bằng mét (m), φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OO'}$ và $\vec{F}$, còn công A được tính bằng Jun (viết tắt là J).

Trong toán học, giá trị A của biểu thức trên (không kể đơn vị đo) được gọi là tích vô hướng của hai vectơ $\vec{F}$ và $\overrightarrow{OO'}$.

1. Định nghĩa

*Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. **Tích vô hướng** của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau :*

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}).}$$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

☞ ***Chú ý***

a) Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

b) Khi $\vec{a} = \vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là *bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$*.

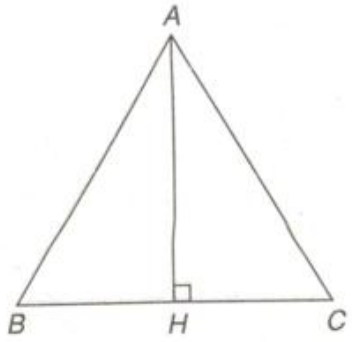
Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|.|\vec{a}|\cos 0^o = |\vec{a}|^2$.

Ví dụ. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và có chiều cao AH. Khi đó ta có (h.2.9)

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a.a.\cos 60^o = \frac{1}{2}a^2,$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = a.a.\cos 120^o = -\frac{1}{2}a^2,$$

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.a.\cos 90^o = 0.$$



Hình 2.9

2. Các tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng :

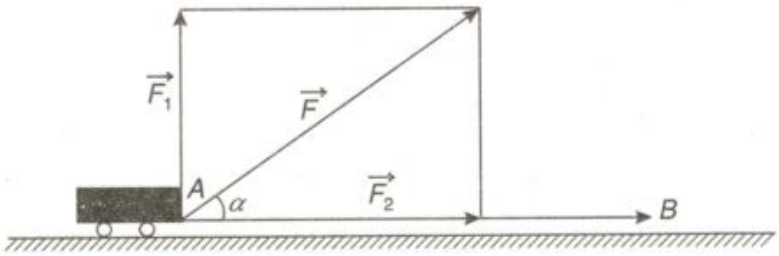
> Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có :
>
> $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán) ;
>
> $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối) ;
>
> $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(k\vec{b})$;
>
> $\vec{a}^2 \geq 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Nhận xét. Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra :

> $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;
>
> $(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;
>
> $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

1 Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Khi nào thì tích vô hướng của hai vectơ đó là số dương ? Là số âm ? Bằng 0 ?

Ứng dụng. Một xe goòng chuyển động từ A đến B dưới tác dụng của lực $\vec{F}$. Lực $\vec{F}$ tạo với hướng chuyển động một góc α, tức là $(\vec{F}, \overrightarrow{AB}) = \alpha$ (h.2.10).



Hình 2.10

Lực $\vec{F}$ được phân tích thành hai thành phần $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ trong đó $\vec{F_1}$ vuông góc với $\overrightarrow{AB}$, còn $\vec{F_2}$ là hình chiếu của $\vec{F}$ lên đường thẳng AB. Ta có $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$. Công $\mathscr{A}$ của lực $\vec{F}$ là $\mathscr{A} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = (\vec{F_1} + \vec{F_2}).\overrightarrow{AB} =$
$= \vec{F_1}.\overrightarrow{AB} + \vec{F_2}.\overrightarrow{AB} = \vec{F_2}.\overrightarrow{AB}$.

Như vậy lực thành phần $\vec{F_1}$ không làm cho xe goòng chuyển động nên không sinh công. Chỉ có thành phần $\vec{F_2}$ của lực $\vec{F}$ sinh công làm cho xe goòng chuyển động từ A đến B.

Công thức $\mathscr{A} = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$ là công thức tính công của lực $\vec{F}$ làm vật di chuyển từ A đến B mà ta đã biết trong vật lí.

3. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

Trên mặt phẳng toạ độ $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1\,;\,a_2)$, $\vec{b} = (b_1\,;\,b_2)$. Khi đó tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ là :

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.}$$

Thật vậy $\vec{a}.\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j}).(b_1\vec{i} + b_2\vec{j})$

$$= a_1b_1\vec{i}^2 + a_2b_2\vec{j}^2 + a_1b_2.\vec{i}.\vec{j} + a_2b_1.\vec{j}.\vec{i}.$$

Vì $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = 0$ nên suy ra :

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Nhận xét. Hai vectơ $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$, $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$ đều khác vectơ $\vec{0}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0.$$

2 Trên mặt phẳng toạ độ *Oxy* cho ba điểm *A*(2 ; 4), *B*(1 ; 2), *C*(6 ; 2). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

4. Ứng dụng

a) Độ dài của vectơ

Độ dài của vectơ $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$ được tính theo công thức :

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,.}$$

Thật vậy, ta có $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 = \vec{a}.\vec{a} = a_1a_1 + a_2a_2 = a_1^2 + a_2^2$.

Do đó $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

b) Góc giữa hai vectơ

Từ định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra nếu $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$ đều khác $\vec{0}$ thì ta có :

$$\boxed{\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}\,.}$$

Ví dụ. Cho $\overrightarrow{OM} = (-2 ; -1)$, $\overrightarrow{ON} = (3 ; -1)$.

Ta có $\cos\widehat{MON} = \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \dfrac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{OM}|.|\overrightarrow{ON}|} = \dfrac{-6+1}{\sqrt{5}.\sqrt{10}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = 135^o$.

c) Khoảng cách giữa hai điểm

Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A ; y_A)$ và $B(x_B ; y_B)$ được tính theo công thức :

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\ .}$$

Thật vậy, vì $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)$ nên ta có

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\ .$$

Ví dụ. Cho hai điểm $M(-2 ; 2)$ và $N(1 ; 1)$. Khi đó $\overrightarrow{MN} = (3 ; -1)$ và khoảng cách MN là : $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

Câu hỏi và bài tập

1. Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = a$. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

2. Cho ba điểm O, A, B thẳng hàng và biết $OA = a$, $OB = b$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ trong hai trường hợp :

a) Điểm O nằm ngoài đoạn AB ;

b) Điểm O nằm trong đoạn AB .

3. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Gọi M và N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho hai dây cung AM và BN cắt nhau tại I.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA}$;

b) Hãy dùng kết quả câu a) để tính $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN}$ theo R.

4. Trên mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1 ; 3)$, $B(4 ; 2)$.

a) Tìm toạ độ điểm D nằm trên trục Ox sao cho $DA = DB$;

b) Tính chu vi tam giác OAB ;

c) Chứng tỏ OA vuông góc với AB và từ đó tính diện tích tam giác OAB.

5. Trên mặt phẳng Oxy hãy tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau :

a) $\vec{a} = (2 ; -3)$, $\vec{b} = (6 ; 4)$;

b) $\vec{a} = (3 ; 2)$, $\vec{b} = (5 ; -1)$;

c) $\vec{a} = (-2 ; -2\sqrt{3})$, $\vec{b} = (3 ; \sqrt{3})$.

6. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho bốn điểm $A(7 ; -3)$, $B(8 ; 4)$, $C(1 ; 5)$, $D(0 ; -2)$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

7. Trên mặt phẳng Oxy cho điểm $A(-2 ; 1)$. Gọi B là điểm đối xứng với điểm A qua gốc toạ độ O. Tìm toạ độ của điểm C có tung độ bằng 2 sao cho tam giác ABC vuông ở C.