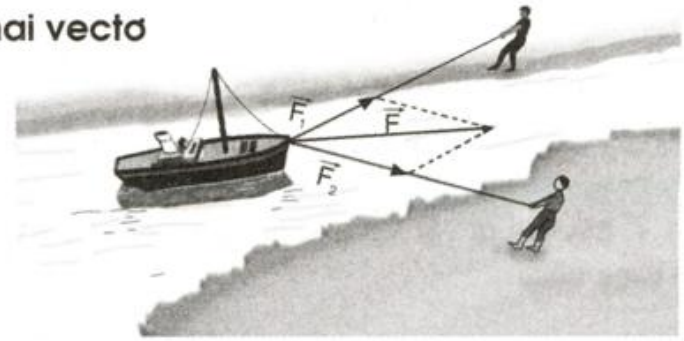
§2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

1. Tổng của hai vectơ



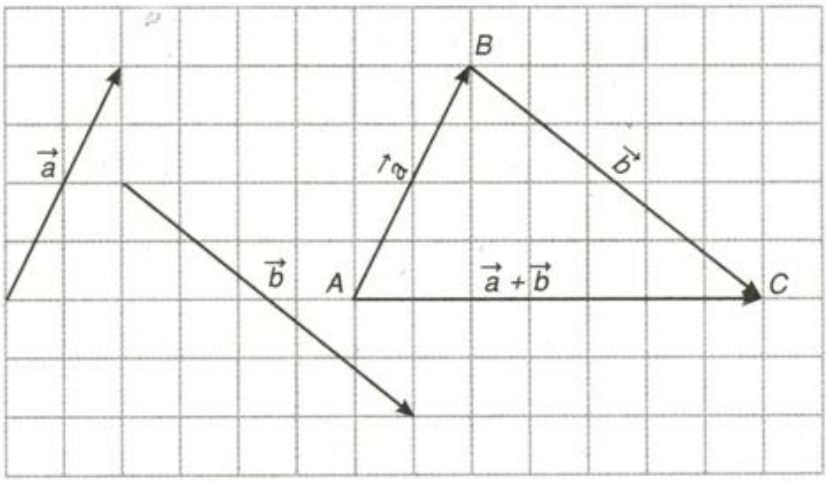
Hình 1.5

Trên hình 1.5, hai người đi dọc hai bên bờ kênh và cùng kéo một con thuyền với hai lực $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$. Hai lực $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ tạo nên hợp lực $\vec{F}$ là tổng của hai lực $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$, làm thuyền chuyển động.

Định nghĩa

*Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng** của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\vec{a} + \vec{b}$. Vậy $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (h.1.6).*

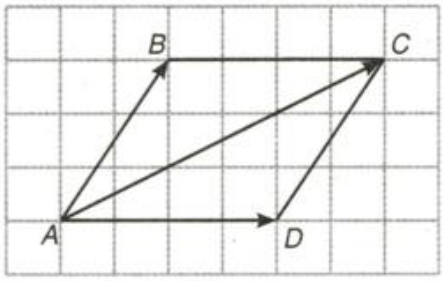
*Phép toán tìm tổng của hai vectơ còn được gọi là **phép cộng vectơ**.*



Hình 1.6

2. Quy tắc hình bình hành

Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



Hình 1.7

Trên hình 1.5, hợp lực của hai lực $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ là lực $\overrightarrow{F}$ được xác định bằng quy tắc hình bình hành.

3. Tính chất của phép cộng các vectơ

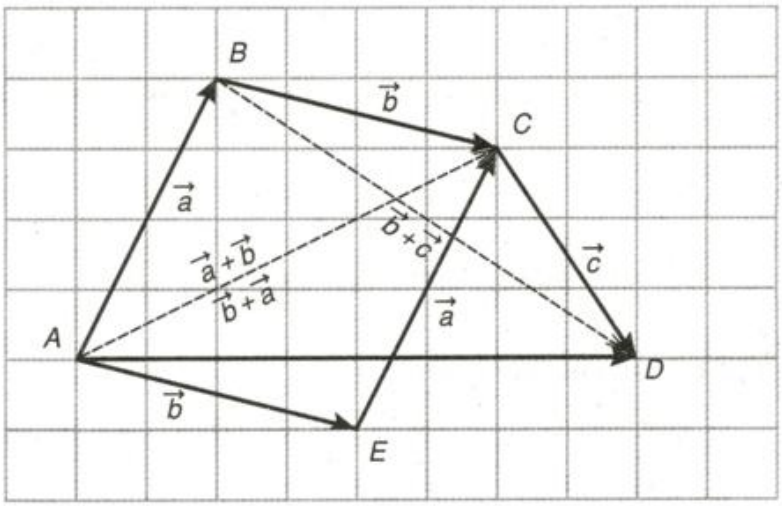
Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tùy ý ta có

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán) ;

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp) ;

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (tính chất của vectơ - không).

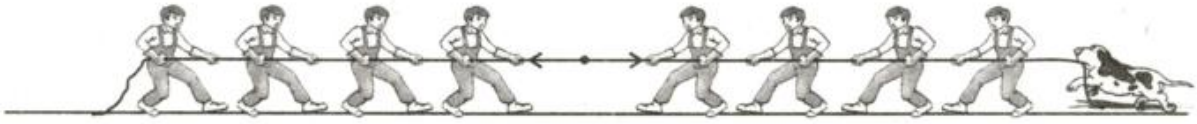
Hình 1.8 minh hoạ cho các tính chất trên.



Hình 1.8

1 Hãy kiểm tra các tính chất của phép cộng trên hình 1.8.

4. Hiệu của hai vectơ



a) Vectơ đối

2 Vẽ hình bình hành *ABCD*. Hãy nhận xét về độ dài và hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

Cho vectơ $\vec{a}$. Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với $\vec{a}$ được gọi là *vectơ đối* của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

Mỗi vectơ đều có vectơ đối, chẳng hạn vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, nghĩa là $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

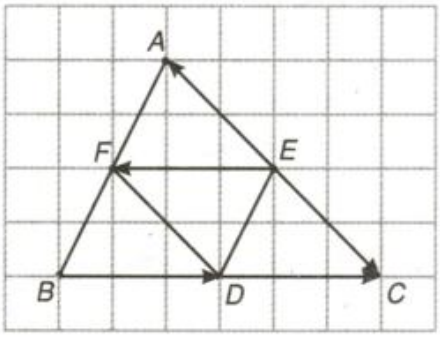
Đặc biệt, vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

Ví dụ 1. Nếu *D*, *E*, *F* lần lượt là trung điểm của các cạnh *BC*, *CA*, *AB* của tam giác *ABC* (h.1.9), khi đó ta có

$\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{DC}$,

$\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{EF}$,

$\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{EC}$.



Hình 1.9

3 Cho $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$. Hãy chứng tỏ $\overrightarrow{BC}$ là vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$.

b) Định nghĩa hiệu của hai vectơ

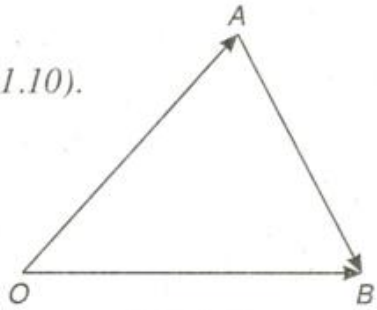
Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta gọi hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

Như vậy

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).}$$

Từ định nghĩa hiệu của hai vectơ, suy ra

Với ba điểm O, A, B tuỳ ý ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ *(h.1.10).*



Hình 1.10

4 Hãy giải thích vì sao hiệu của hai vectơ $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OA}$ là vectơ $\overrightarrow{AB}$.

☞ ***Chú ý.*** 1) Phép toán tìm hiệu của hai vectơ còn được gọi là *phép trừ* vectơ.

2) Với ba điểm tùy ý A, B, C ta luôn có :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc ba điểm) ;

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ (quy tắc trừ).

Thực chất hai quy tắc trên được suy ra từ phép cộng vectơ.

Ví dụ 2. Với bốn điểm bất kì A, B, C, D ta luôn có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Thật vậy, lấy một điểm O tùy ý ta có

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

5. Áp dụng

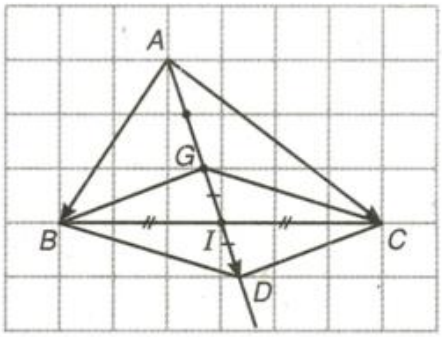
a) *Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi* $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

b) *Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi* $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

CHỨNG MINH

b) Trọng tâm G của tam giác ABC nằm trên trung tuyến AI. Lấy D là điểm đối xứng với G qua I. Khi đó $BGCD$ là hình bình hành và G là trung điểm của đoạn thẳng AD. Suy ra $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$ và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Ta có

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.



Hình 1.11

Ngược lại, giả sử $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Vẽ hình bình hành *BGCD* có *I* là giao điểm của hai đường chéo. Khi đó $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$, suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ nên *G* là trung điểm của đoạn thẳng *AD*. Do đó ba điểm *A*, *G*, *I* thẳng hàng, $GA = 2GI$, điểm *G* nằm giữa *A* và *I*. Vậy *G* là trọng tâm của tam giác *ABC*.

Câu hỏi và bài tập

1. Cho đoạn thẳng *AB* và điểm *M* nằm giữa *A* và *B* sao cho $AM > MB$. Vẽ các vectơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$.

2. Cho hình bình hành *ABCD* và một điểm *M* tùy ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

3. Chứng minh rằng đối với tứ giác *ABCD* bất kì ta luôn có

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$.

4. Cho tam giác *ABC*. Bên ngoài của tam giác vẽ các hình bình hành *ABIJ*, *BCPQ*, *CARS*. Chứng minh rằng $\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$.

5. Cho tam giác đều *ABC* cạnh bằng *a*. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$.

6. Cho hình bình hành *ABCD* có tâm *O*. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$; b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$;

c) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$; d) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

7. Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$. Khi nào có đẳng thức

a) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$; b) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$.

8. Cho $|\vec{a}+\vec{b}|=0$. So sánh độ dài, phương và hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

9. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng *AD* và *BC* trùng nhau.

10. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm *M* và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều là 100 N và $\widehat{AMB}=60^{\circ}$. Tìm cường độ và hướng của lực $\overrightarrow{F_3}$.

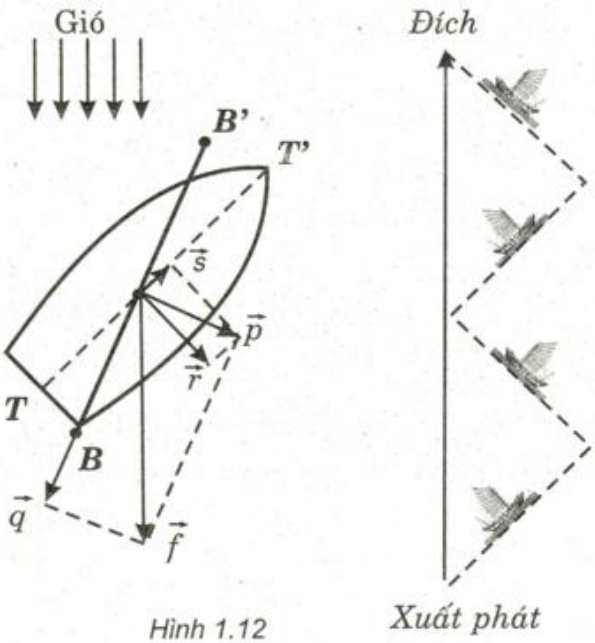
Bài đọc thêm

Thuyền buồm chạy ngược chiều gió

Thông thường người ta vẫn nghĩ rằng gió thổi về hướng nào thì sẽ đẩy thuyền buồm về hướng đó. Trong thực tế con người đã nghiên cứu tìm cách lợi dụng sức gió làm cho thuyền buồm chạy ngược chiều gió. Vậy người ta đã làm như thế nào để thực hiện được điều tưởng chừng như vô lí đó ?

Nói một cách chính xác thì người ta có thể làm cho thuyền chuyển động theo một góc nhọn, gần bằng $\frac{1}{2}$ góc vuông đối với chiều gió thổi. Chuyển động này được thực hiện theo đường dích dắc nhằm tới hướng cần đến của mục tiêu.

Để làm được điều đó ta đặt thuyền theo hướng TT' và đặt buồm theo phương BB' như hình vẽ.



Hình 1.12

Khi đó gió thổi tác động lên mặt buồm một lực. Tổng hợp lực là lực $\vec{f}$ có điểm đặt ở chính giữa buồm. Lực $\vec{f}$ được phân tích thành hai lực : lực $\vec{p}$ vuông góc với cánh buồm BB' và lực $\vec{q}$ theo chiều dọc cánh buồm. Ta có $\vec{f} = \vec{p} + \vec{q}$. Lực $\vec{q}$ này không đẩy buồm đi đâu cả vì lực cản của gió đối với buồm không đáng kể. Lúc đó chỉ còn lực $\vec{p}$ đẩy buồm dưới một góc vuông. Như vậy khi có gió thổi, luôn luôn có một lực $\vec{p}$ vuông góc với mặt phẳng BB' của buồm. Lực $\vec{p}$ này được phân tích thành lực $\vec{r}$ vuông góc với sống thuyền và lực $\vec{s}$ dọc theo sống thuyền TT' hướng về mũi thuyền. Khi đó ta có $\vec{p} = \vec{s} + \vec{r}$. Lực $\vec{r}$ rất nhỏ so với sức cản rất lớn của nước, do thuyền buồm có sống thuyền rất sâu. Chỉ còn lực $\vec{s}$ hướng về phía trước dọc theo sống thuyền đẩy thuyền đi một góc nhọn ngược với chiều gió thổi. Bằng cách đổi hướng thuyền theo con đường dích dắc, thuyền có thể đi tới đích theo hướng ngược chiều gió mà không cần lực đẩy.