§ 9 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

• Khi giải các bất phương trình mũ và bất phương trình lôgarit, cần nhớ rằng các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

Sau đây, ta xét một số ví dụ đơn giản.

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau :

a) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$; b) $9^x < 2.\,3^x + 3$.

Giải

a) Ta biến đổi bất phương trình đã cho như sau :

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2} \Leftrightarrow 2^{x+2}(1 - 2 - 2^2) > 5^{x+1}(1 - 5)$$

$$\Leftrightarrow -5.\,2^{x+2} > -4.\,5^{x+1} \Leftrightarrow 2^x < 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x < 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ (do tính nghịch biến của hàm số } y = \left(\frac{2}{5}\right)^x\text{)}.$$

Kết luận : Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (0\,;+\infty)$.

b) Do $9^x = (3^x)^2$ nên khi đặt $t = 3^x$, ta được bất phương trình $t^2 - 2t - 3 < 0$. Bất phương trình này có nghiệm là $-1 < t < 3$ nên

$$9^x < 2.\,3^x + 3 \Leftrightarrow -1 < 3^x < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x > -1 \\ 3^x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3^x < 3 \Leftrightarrow x < 1$$

(do $3^x > 0 > -1$ với mọi x và tính đồng biến của hàm số $y = 3^x$).

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $(-\infty\,; 1)$.

H1 *Giải bất phương trình* $5^{2x+1} > 5^x + 4$.

• Đối với các bất phương trình lôgarit, ta phải đặc biệt chú ý đến điều kiện xác định của bất phương trình.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$\log_{0,5}(4x+11) < \log_{0,5}(x^2+6x+8). \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện xác định của bất phương trình (1) là $4x+11>0$ và $x^2+6x+8>0$. Với điều kiện đó, do tính nghịch biến của hàm số lôgarit cơ số 0,5, bất phương trình (1) tương đương với $4x+11>x^2+6x+8$. Bởi vậy, ta có thể viết

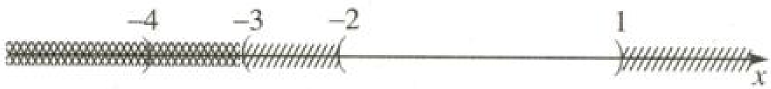
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+11>0 \\ x^2+6x+8>0 \\ 4x+11>x^2+6x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+8>0 \\ 4x+11>x^2+6x+8. \end{cases}$$

Giải từng bất phương trình :

$x^2+6x+8>0 \Leftrightarrow x<-4$ hoặc $x>-2$;

$4x+11>x^2+6x+8 \Leftrightarrow x^2+2x-3<0 \Leftrightarrow -3<x<1.$

Các giá trị của x thoả mãn đồng thời cả hai bất phương trình trên là $x \in (-2\,;\,1)$.



Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S=(-2\,;\,1)$.

H2 *Giải bất phương trình* $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(2-x)$.

Câu hỏi và bài tập

Giải các bất phương trình sau :

80. a) $2^{3-6x}>1$; b) $16^x>0{,}125$.

81. a) $\log_5(3x-1)<1$; b) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1)>0$;

c) $\log_{0,5}(x^2-5x+6)\ge -1$; d) $\log_3\dfrac{1-2x}{x}\le 0$.

82. a) $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \leq 0$; b) $2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0$.

83. a) $\log_{0,1}(x^2 + x - 2) > \log_{0,1}(x + 3)$;

b) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) + 2\log_3(2 - x) \geq 0$.