§ 2 CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Căn bậc hai của số phức

ĐỊNH NGHĨA

> Cho số phức w. Mỗi số phức z thoả mãn $z^2 = w$ được gọi là một **căn bậc hai** của w.

Nói cách khác, mỗi căn bậc hai của w là một nghiệm của phương trình $z^2 - w = 0$ (với ẩn z).

Có thể tìm căn bậc hai của số phức w như sau :

a) Trường hợp w là số thực

Dễ thấy rằng căn bậc hai của 0 là 0.

Xét số thực $w = a \neq 0$,

Khi $a > 0$ thì $z^2 - a = (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a})$. Do đó, $z^2 - a = 0$ khi và chỉ khi $z = \sqrt{a}$ hoặc $z = -\sqrt{a}$. Vậy a có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.

Khi $a < 0$ thì $z^2 - a = (z - \sqrt{-a}\, i)(z + \sqrt{-a}\, i)$. Do đó, $z^2 - a = 0$ khi và chỉ khi $z = \sqrt{-a}\, i$ hoặc $z = -\sqrt{-a}\, i$. Vậy a có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}\, i$ và $-\sqrt{-a}\, i$.

Ví dụ 1. Hai căn bậc hai của -1 là i và $-i$.

Hai căn bậc hai của $-a^2$ (a là số thực khác 0) là ai và $-ai$.

b) Trường hợp $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $b \neq 0$

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của w khi và chỉ khi $z^2 = w$, tức là

$$(x + yi)^2 = a + bi.$$

Do $(x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ nên $z^2 = w$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Vậy để tìm các căn bậc hai của $w = a + bi$ ta cần giải hệ phương trình này.

Mỗi cặp số thực $(x\ ;\ y)$ nghiệm đúng hệ phương trình đó cho ta một căn bậc hai $x + yi$ của số phức $a + bi$.

Ví dụ 2

a) Tìm các căn bậc hai của $-5 + 12i$, tức là tìm các số phức $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ sao cho $(x + yi)^2 = -5 + 12i$ nên ta cần giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy \ = 12. \end{cases}$$

Phương trình thứ hai cho $y = \dfrac{12}{2x} = \dfrac{6}{x}$, thay vào phương trình thứ nhất, ta có :

$$\begin{cases} x^2 - \dfrac{36}{x^2} = -5 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \dfrac{6}{x}. \end{cases}$$

Hệ này có hai nghiệm $(2\ ;\ 3)$; $(-2\ ;\ -3)$.

Vậy có hai căn bậc hai của $-5 + 12i$ là $2 + 3i$ và $-2 - 3i$.

b) Tìm các căn bậc hai của i tức là tìm $x + yi$ $(x,\ y \in \mathbb{R})$ sao cho $(x + yi)^2 = i$ nên ta cần giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1. \end{cases}$$

Dễ thấy nó có hai nghiệm $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Vậy i có hai căn bậc hai là $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

• Một cách tổng quát, có thể chứng minh rằng

> * Số 0 có đúng một căn bậc hai là 0.
>
> * Mỗi số phức khác 0 có hai căn bậc hai là hai số đối nhau (khác 0).
>
> Đặc biệt, số thực a dương có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$; số thực a âm có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}\,i$ và $-\sqrt{-a}\,i$.

H1 *Biết một căn bậc hai của w_1 là z_1 và một căn bậc hai của w_2 là z_2. Hãy tìm tất cả các căn bậc hai của w_1w_2.*

2. Phương trình bậc hai

Nhờ tính được căn bậc hai của số phức, dễ thấy mọi phương trình bậc hai

$$Az^2 + Bz + C = 0 \qquad (1)$$

trong đó A, B, C là những số phức, $(A \neq 0)$ đều có hai nghiệm phức (có thể trùng nhau). Việc giải phương trình đó được tiến hành tương tự như trong trường hợp A, B, C là những số thực. Cụ thể là :

> Xét biệt thức $\Delta = B^2 - 4AC$.
>
> * Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt
>
> $$z_1 = \frac{-B + \delta}{2A},\ z_2 = \frac{-B - \delta}{2A}$$
>
> trong đó δ là một căn bậc hai của Δ.
>
> * Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép
>
> $$z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}.$$

Đặc biệt, khi Δ là số thực dương thì hai nghiệm của phương trình (1) là $z_1 = \dfrac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}$, $z_2 = \dfrac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}$; khi Δ là số thực âm thì hai nghiệm của phương trình (1) là $z_1 = \dfrac{-B + \sqrt{-\Delta}\,i}{2A}$, $z_2 = \dfrac{-B - \sqrt{-\Delta}\,i}{2A}$.

Ví dụ 3

a) Phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ có biệt thức $\Delta = -3$ nên nó có hai nghiệm phân biệt là $\dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

b) Phương trình $z^2 + (-2 + i)z - 2i = 0$ có biệt thức

$$\Delta = (-2 + i)^2 + 8i = 3 + 4i = (2 + i)^2$$

nên nó có hai nghiệm là

$$z_1 = \frac{1}{2}[2 - i + (2 + i)] = 2 \text{ và } z_2 = \frac{1}{2}[2 - i - (2 + i)] = -i.$$

H2 *Xét phương trình bậc hai*

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

trong đó A, B, C là những số thực, $A \neq 0$. Chứng minh rằng nếu $z_0 \in \mathbb{C}$ là một nghiệm của phương trình thì $\overline{z_0}$ cũng là một nghiệm của nó.

CHÚ Ý

Trên đây, ta đã thấy mọi phương trình bậc hai (với hệ số phức) có hai nghiệm phức (có thể trùng nhau). Hơn nữa, người ta còn chứng minh được rằng mọi phương trình bậc n

$$A_0z^n + A_1z^{n-1} + \ldots + A_{n-1}z + A_n = 0$$

(trong đó n là một số nguyên dương, A_0, A_1, ..., A_n là $n + 1$ số phức cho trước, $A_0 \neq 0$) luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

Tính chất quan trọng này của tập hợp các số phức là nội dung của một định lí gọi là *Định lí cơ bản của đại số*.

Câu hỏi và bài tập

17. Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau :

$-i$; $4i$; -4 ; $1 + 4\sqrt{3}i$.

18. Chứng minh rằng nếu z là một căn bậc hai của số phức w thì $|z| = \sqrt{|w|}$.

19. Tìm nghiệm phức của các phương trình bậc hai sau :

a) $z^2 = z + 1$;

b) $z^2 + 2z + 5 = 0$;

c) $z^2 + (1 - 3i)z - 2(1 + i) = 0$.

Chú ý : Có thể dùng máy tính bỏ túi để tìm nghiệm (gần đúng) của phương trình bậc hai với hệ số thực ngay cả khi nghiệm của nó không phải là số thực. Chẳng hạn, dùng máy tính bỏ túi CASIO *fx-500MS* để giải phương trình $x^2 - 6x + 58 = 0$ thì ấn

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ 1 $\boxed{\text{MODE}}$ 2 (để vào chương trình giải phương trình bậc hai), ấn tiếp

1 $\boxed{=}$ -6 $\boxed{=}$ 58 (để đưa vào các hệ số của phương trình) ; ấn tiếp

$\boxed{=}$: trên màn hình hiện $x1 = 3$; ấn tiếp

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{Re} \leftrightarrow \text{Im}}$: trên màn hình hiện $x1 = 7._i$, (điều đó có nghĩa là nghiệm thứ nhất là $3 + 7i$) ; ấn tiếp

$\boxed{=}$: trên màn hình hiện $x2 = 3$; ấn tiếp

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{Re} \leftrightarrow \text{Im}}$: trên màn hình hiện $x2 = -7._i$, (điều đó có nghĩa là nghiệm thứ hai là $3 - 7i$).

(Thực ra, chỉ cần biết nghiệm thứ nhất là $3 + 7i$ thì đã suy ra ngay nghiệm thứ hai là $\overline{3 + 7i} = 3 - 7i$).

20. a) Hỏi công thức Vi-ét về phương trình bậc hai với hệ số thực có còn đúng cho phương trình bậc hai với hệ số phức không ? Vì sao ?

b) Tìm hai số phức, biết tổng của chúng bằng $4 - i$ và tích của chúng bằng $5(1 - i)$.

c) Có phải mọi phương trình bậc hai $z^2 + Bz + C = 0$ (B, C là hai số phức) nhận hai nghiệm là hai số phức liên hợp không thực phải có các hệ số B, C là hai số thực ? Vì sao ? Điều ngược lại có đúng không ?

21. a) Giải phương trình sau :

$$(z^2 + i)(z^2 - 2iz - 1) = 0.$$

b) Tìm số phức B để phương trình bậc hai $z^2 + Bz + 3i = 0$ có tổng bình phương hai nghiệm bằng 8.

22. *Đố vui*. Một học sinh kí hiệu một căn bậc hai của -1 là $\sqrt{-1}$ và tính $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$ như sau :

a) Theo định nghĩa căn bậc hai của -1 thì $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1$.

b) Theo tính chất của căn bậc hai (tích của hai căn bậc hai của hai số bằng căn bậc hai của tích hai số đó) thì

$$\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Từ đó, học sinh đó suy ra $-1 = 1$.

Hãy tìm điều sai trong lập luận trên.

Em có biết

VÀI NÉT LỊCH SỬ PHÁT TRIỂN SỐ PHỨC

Từ lâu, người ta đã biết công thức nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$.

Hỏi có chăng công thức nghiệm của phương trình bậc ba

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ (a \neq 0)$$

(chỉ dùng phép tính cộng, trừ, nhân, chia, lấy căn trên các hệ số) ?

Girolamo Cardano
(1501 – 1576)

Đến thế kỉ XVI, Các-đa-nô (G. Cardano, 1501 – 1576, người Ý) tìm ra một công thức như thế ; nhưng dù a, b, c, d là những số thực và chỉ nhằm tìm nghiệm thực, công thức vẫn đề cập đến số phức.

Chẳng hạn, với phương trình $x^3 + px + q = 0$ (p, q là hai số thực cho trước) thì công thức nghiệm có dạng

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Cụ thể là gọi δ là một căn bậc hai của $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$, lấy u, v sao cho $u^3=-\frac{q}{2}+\delta$, $v^3=-\frac{q}{2}-\delta$ (mà $uv=-\frac{p}{3}$) thì $x=u+v$ là một nghiệm của $x^3+px+q=0$.

Nếu $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ thì ta gặp căn bậc hai δ của số thực âm nhưng kết quả $u+v$ có thể vẫn là số thực.

Ví dụ, với phương trình $x^3-15x-4=0$ thì $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-121$; lấy $\delta=11i$ thì $-\frac{q}{2}+\delta=2+11i=(2+i)^3$; $-\frac{q}{2}-\delta=2-11i=(2-i)^3$. Vậy lấy $u=2+i$, $v=2-i\left(uv=5=-\frac{p}{3}\right)$ thì $u+v=4$ là một nghiệm của phương trình $x^3-15x-4=0$.

Tuy công thức nghiệm phương trình bậc ba mang tên Các-đa-nô nhưng thực ra, Tác-ta-gli-a (N. Tartaglia, 1499 – 1557, người Ý) đã tìm được lời giải nhiều kiểu phương trình bậc ba và tiết lộ phương pháp giải cho Các-đa-nô. Nhờ đó Các-đa-nô tìm ra lời giải tổng quát và công bố nó vào năm 1545. Một học trò của Các-đa-nô là Fe-ra-ri (L. Ferrari, 1522 – 1565, người Ý) tìm ra cách giải phương trình bậc bốn bằng cách đưa về giải một phương trình bậc ba.

Việc các nhà toán học Ý táo bạo dùng các biểu thức chứa những số đang còn có vẻ bí ẩn (số ảo) để đến được kết quả thực dần dà cũng làm cho các nhà toán học chấp nhận sử dụng kí hiệu $a+b\sqrt{-1}$ (a, b là hai số thực) khi giải phương trình bậc hai, bậc ba, bậc bốn trong thế kỉ XVII.

Sang đầu thế kỉ XVIII, Moa-vrơ (A. De Moivre, 1667 – 1754, người Anh) tìm được mối liên quan giữa căn của số phức với lượng giác. Năm 1746, Đa-lăm-be (J. D'Alembert, 1717 – 1783, người Pháp) đưa ra chứng minh đầu tiên định lí cơ bản của đại số. Ơ-le (L. Euler, 1707 – 1783, người Thuỵ Sĩ) cũng nghiên cứu vấn đề này và chính Ơ-le đã dùng kí hiệu i để chỉ đơn vị ảo. Gau-xơ (C. Gauss, 1777 – 1855, người Đức) đưa ra chứng minh đầy đủ định lí cơ bản của đại số vào năm 1799.

Đến thế kỉ XIX, lí thuyết hàm số biến số phức được phát triển mạnh (những người đóng góp lớn là Cô-si (A.L. Cauchy, 1789 – 1857, người Pháp), Ri-man (B. Riemann, 1826 – 1866, người Đức), ...). Ngày nay số phức xuất hiện trong nhiều nghiên cứu toán học, vật lí, khoa học, kĩ thuật.

Luyện tập

23. Tìm nghiệm phức của phương trình $z + \frac{1}{z} = k$ trong các trường hợp sau :

a) $k = 1$; b) $k = \sqrt{2}$; c) $k = 2i$.

24. Giải các phương trình sau trên $\mathbb{C}$ (tức là tìm nghiệm phức của các phương trình đó) và biểu diễn hình học tập hợp các nghiệm của mỗi phương trình (trong mặt phẳng phức) :

a) $z^3 + 1 = 0$; b) $z^4 - 1 = 0$;

c) $z^4 + 4 = 0$; d) $8z^4 + 8z^3 = z + 1$.

25. a) Tìm các số thực b, c để phương trình (với ẩn z)

$$z^2 + bz + c = 0$$

nhận $z = 1 + i$ làm một nghiệm.

b) Tìm các số thực a, b, c để phương trình (với ẩn z)

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

nhận $z = 1 + i$ làm nghiệm và cũng nhận $z = 2$ làm nghiệm.

26. a) Dùng công thức cộng trong lượng giác để chứng minh rằng với mọi số thực φ, ta có

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

Từ đó hãy tìm mọi căn bậc hai của số phức $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$. Hãy so sánh cách giải này với cách giải trong bài học ở §2.

b) Tìm các căn bậc hai của $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$ bằng hai cách nói ở câu a).