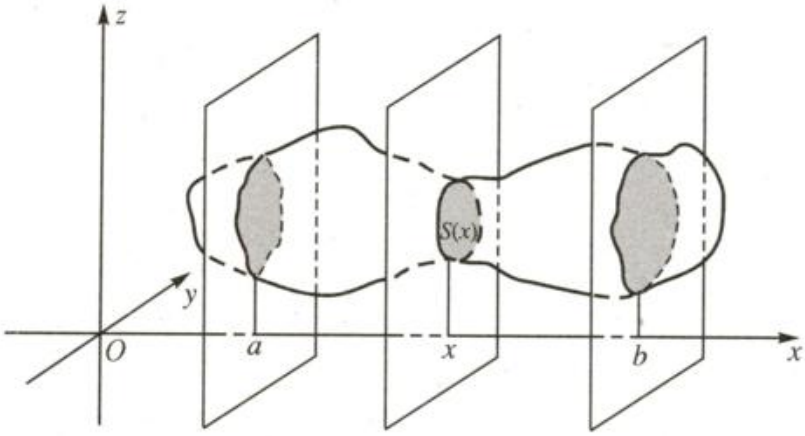
§ 6 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

1. Tính thể tích của vật thể

Cho một vật thể trong không gian toạ độ $Oxyz$. Gọi B là phần của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b.



Hình 3.10

Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(a \le x \le b)$ (h.3.10).

Giả sử $S = S(x)$ là một hàm số liên tục. Người ta chứng minh được rằng thể tích V của B là

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \qquad (1)$$

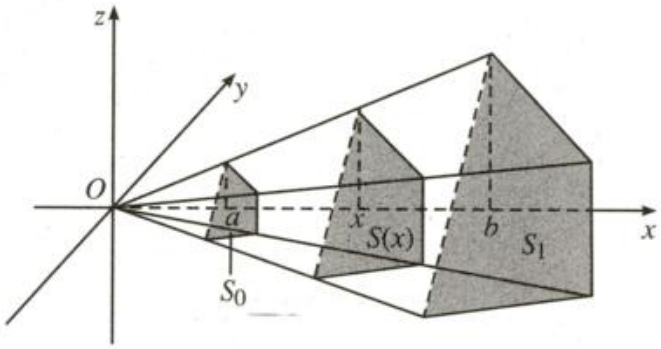
Sử dụng công thức (1) ta tìm được công thức tính thể tích của một số vật thể quen thuộc trong hình học.

Ví dụ 1 (*Thể tích khối chóp cụt*). Cho khối chóp cụt có chiều cao h, diện tích đáy nhỏ và đáy lớn thứ tự là S_0, S_1. Chứng minh rằng thể tích V của nó là

$$V = \frac{h}{3}(S_0 + \sqrt{S_0S_1} + S_1).$$

Giải

Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, ta đặt khối chóp (sinh ra khối chóp cụt) sao cho đường cao nằm trên trục Ox và đỉnh trùng với gốc toạ độ.



Hình 3.11

Gọi a và b lần lượt là khoảng cách từ O đến đáy nhỏ và đáy lớn, ta có chiều cao của khối chóp cụt là $h = b - a$ (h.3.11). Thiết diện của khối chóp cụt cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(a \le x \le b)$ là một đa giác đồng dạng với đáy lớn với tỉ số đồng dạng là $\frac{x}{b}$.

Ta có $\frac{S(x)}{S_1} = \frac{x^2}{b^2}$. Vậy $S(x) = S_1 \frac{x^2}{b^2}$.

Theo công thức (1), ta có

$$V = \int_a^b S_1 \frac{x^2}{b^2} dx = \frac{S_1(b^3 - a^3)}{3b^2} = \frac{b-a}{3} \cdot \frac{S_1a^2 + S_1ab + S_1b^2}{b^2}$$

$$= \frac{h}{3}\left(\frac{S_1a^2}{b^2} + \frac{S_1a}{b} + S_1\right).$$

Để ý rằng $S_0 = S(a) = \frac{S_1a^2}{b^2}$ và $\frac{S_1a}{b} = \sqrt{S_1\frac{S_1a^2}{b^2}} = \sqrt{S_1S_0}$ nên $V = \frac{h}{3}(S_0 + \sqrt{S_0S_1} + S_1)$.

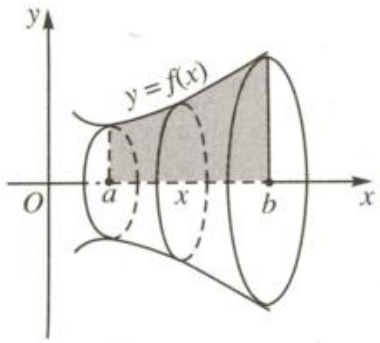
Nhận xét. Khối chóp được coi là khối chóp cụt có $S_0 = 0$. Vì vậy, thể tích V của khối chóp có chiều cao h và diện tích đáy S là

$$V = \frac{Sh}{3}.$$

2. Thể tích khối tròn xoay

Một hình phẳng quay xung quanh một trục nào đó tạo nên một *khối tròn xoay*.

• Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a\,;\,b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay (h.3.12). Thể tích V của nó được tính theo công thức



Hình 3.12

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x. \qquad (2)}$$

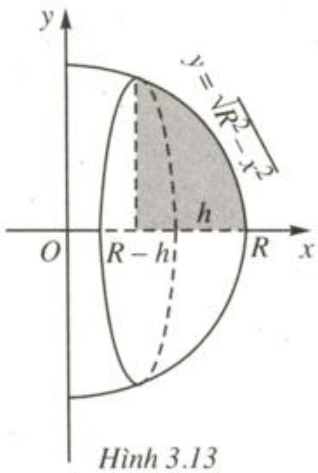
Thật vậy, thiết diện của khối tròn xoay cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$ là một hình tròn bán kính $f(x)$. Do đó $S(x) = \pi f^2(x)$. Vì thế, từ công thức (1) ta suy ra công thức (2).

Ví dụ 2 (*Thể tích khối chỏm cầu*). Cho một khối chỏm cầu bán kính R và chiều cao h. Chứng minh rằng thể tích V của khối chỏm cầu là

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

Giải

Trong mặt phẳng Oxy, xét hình phẳng giới hạn bởi cung tròn tâm O bán kính R có phương trình $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, trục hoành và đường thẳng $x = R - h$ $(0 < h \le R)$. Quay hình phẳng đó quanh trục hoành ta thu được khối chỏm cầu bán kính R chiều cao h (h.3.13).



Hình 3.13

Theo công thức (2) thể tích của khối chỏm cầu là

$$V = \pi\int_{R-h}^{R}(R^2 - x^2)\mathrm{d}x = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R}$$

$$= \pi\left[R^3 - \frac{R^3}{3} - R^2(R-h) + \frac{(R-h)^3}{3}\right] = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

Nhận xét

Khối bán cầu bán kính R được coi là khối chỏm cầu bán kính R và chiều cao $h = R$. Vì vậy, thể tích của khối bán cầu bán kính R là

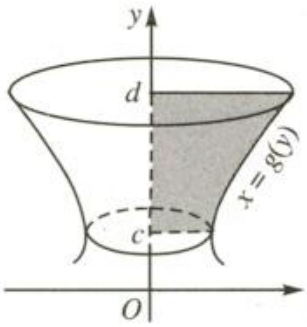
$$V = \pi R^2\left(R - \frac{R}{3}\right) = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

Do đó, thể tích hình cầu bán kính R là

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

H *Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng đó quanh trục hoành.*

• Tương tự, cho đường cong có phương trình $x = g(y)$, trong đó g là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[c\ ;\ d]$. Hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x = g(y)$, trục tung và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$, quay quanh trục tung tạo nên một khối tròn xoay (h.3.14). Thể tích V của nó được tính theo công thức



Hình 3.14

$$\boxed{V = \pi\int_c^d g^2(y)\,dy. \qquad (3)}$$

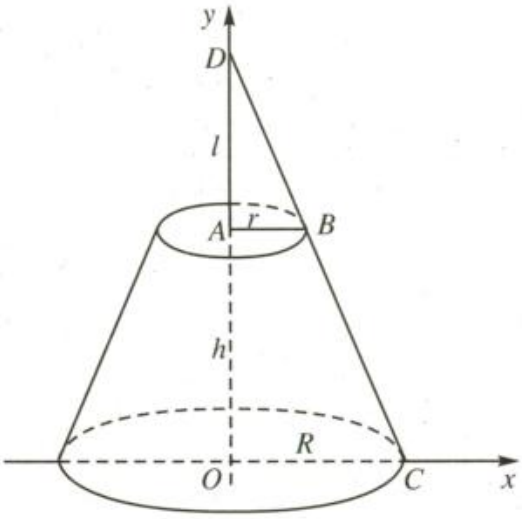
Thật vậy, từ công thức (2) bằng cách xem x là hàm của biến y ta suy ra công thức (3). □

Ví dụ 3 (*Thể tích khối nón cụt*). Cho khối nón cụt có chiều cao h, bán kính đáy lớn và đáy nhỏ lần lượt là R và r. Chứng minh rằng thể tích V của khối nón cụt đó là

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2).$$

Giải

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy xét hình thang vuông $OABC$ với $OA = h$, $AB = r$ và $OC = R$ (h.3.15). Quay hình thang đó quanh trục Oy ta được khối nón cụt đã cho.



Hình 3.15

Giả sử BC kéo dài cắt Oy tại D. Đặt $AD = l$, $OD = a$. Ta có $a - l = h$. Phương trình đường thẳng BC là $x = \dfrac{R(a-y)}{a}$. Theo công thức (3) ta có

$$V = \pi\int_0^h \frac{R^2(a-y)^2}{a^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi R^2}{3a^2}(a^3 - l^3)$$

$$= \frac{\pi R^2}{3a^2}(a-l)(a^2 + al + l^2) = \frac{\pi R^2 h}{3}\left[1 + \frac{l}{a} + \left(\frac{l}{a}\right)^2\right].$$

Vì $\dfrac{l}{a} = \dfrac{r}{R}$ nên khi thay $\dfrac{l}{a}$ bởi $\dfrac{r}{R}$ ta được

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h\left[1 + \frac{r}{R} + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2). \qquad \square$$

Nhận xét. Khi $R = r$, khối nón cụt trở thành khối trụ có chiều cao h và bán kính đáy R. Vì vậy, thể tích của khối trụ là

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R^2 + R^2) = \pi R^2 h.$$

Khi $r = 0$, khối nón cụt trở thành khối nón có chiều cao h và bán kính đáy R. Vì vậy, thể tích của khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Câu hỏi và bài tập

29. Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1 \le x \le 1)$ là một hình vuông cạnh là $2\sqrt{1 - x^2}$.

30. Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le \pi)$ là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.

31. Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $y = 0$, $x = 4$ và $y = \sqrt{x} - 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành.

32. Cho hình phẳng B giới hạn bởi các đường $x = \frac{2}{y}$, $x = 0$, $y = 1$ và $y = 4$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình B quanh trục tung.

33. Cho hình phẳng B giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{5}\,y^2$, $x = 0$, $y = -1$ và $y = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình B quanh trục tung.

Em có biết

1. AI LÀ NGƯỜI PHÁT MINH RA PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN ?

Cùng với phép tính vi phân, phép tính tích phân là một thành tựu lớn của trí tuệ nhân loại. Nó đã tạo nên một bước ngoặt lớn trong sự phát triển của khoa học và trở thành một công cụ sắc bén, đầy sức mạnh được các nhà khoa học sử dụng rộng rãi trong nghiên cứu cũng như trong ứng dụng thực tiễn.

Phép tính vi phân và tích phân do hai nhà bác học lớn là Niu-tơn (I. Newton 1643 – 1727), người Anh và Lai-bơ-nit (G. Leibniz 1646 – 1716), người Đức, sáng tạo ra đồng thời và độc lập với nhau.

Thực ra đây là một cuộc chạy tiếp sức của nhiều thế hệ các nhà bác học xuất sắc trong nhiều thế kỉ. Trước Niu-tơn và Lai-bơ-nit hai nghìn năm, nhà bác học Ác-si-mét đã có ý tưởng đầu tiên về phép tính tích phân. Trong bức thư gửi người bạn, ông đã đưa ra một phương pháp mới gọi là "phương pháp vét cạn" và đã sử dụng nó để giải nhiều bài toán tính diện tích, thể tích, chiều dài cung. Đó là tiền thân của phép tính tích phân. Sau ông nhiều nhà toán học khác cũng tham gia mở đường cho sự ra đời của tích phân, trong đó phải kể đến những đóng góp xuất sắc của các nhà khoa học như J. Kê-ple (J. Kepler), Ca-va-li-ơ-ri (B. Cavalieri), Phéc-ma, Đề-các, Ba-râu (I. Barrow).

Ngày nay các nhà nghiên cứu đều nhất trí rằng về mặt thời gian, Niu-tơn khám phá ra phép vi tính vi - tích phân trước Lai-bơ-nit khoảng 10 năm nhưng Lai-bơ-nit lại cho công bố công khai công trình của mình trước Niu-tơn tới ba năm. Về hình thức, phép tính tích phân của Niu-tơn và phép tính tích phân của Lai-bơ-nit khác nhau rõ rệt. Niu- tơn trình bày các kết quả của mình dưới ngôn ngữ Hình học, còn Lai-bơ-nit dùng ngôn ngữ Đại số. Các kí hiệu của Lai-bơ-nit phong phú và thuận tiện hơn nhiều so với các kí hiệu của Niu-tơn (dấu tích phân và các kí hiệu vi phân, đạo hàm mà chúng ta dùng ngày nay là của Lai-bơ-nit). Về sự kết hợp giữa phép tính vi – tích phân với các nghiên cứu về khoa học tự nhiên thì Lai-bơ-nit không sâu sắc bằng Niu-tơn nhưng đứng trên góc độ toán học thì phép tính vi - tích phân của Lai-bơ-nit thể hiện một tầm nhìn bao quát hơn, một trí tưởng tượng tinh tế hơn.

2. VÀI NÉT VỀ CUỘC ĐỜI VÀ SỰ NGHIỆP CỦA NIU-TƠN VÀ LAI-BƠ-NIT

1) Niu-tơn (1643 – 1727) là nhà toán học, vật lí học, cơ học và thiên văn học vĩ đại người Anh. Ông sinh ra ở một vùng quê ở nước Anh. Người cha qua đời trước khi ông ra đời. Người mẹ vì quá đau buồn nên sinh ông thiếu tháng. Lúc mới sinh ông bé tới mức đặt được vào một chiếc cốc to. Không ai ngờ rằng đứa bé quặt quẹo như vậy lại có thể thọ tới 85 tuổi và trở thành một nhà khoa học vĩ đại như vậy.

Isaac Newton
(1643 – 1727)

Niu-tơn được người đương thời mô tả là có tầm vóc trung bình, béo chắc, đầu luôn đội tóc giả, có đôi mắt sáng và thông minh. Ông sống rất giản dị, khiêm nhường, say mê với công việc và rất đãng trí.

2) Lai-bơ-nit (1646 – 1716) là nhà toán học, vật lí học, triết học thiên tài người Đức. Ông sinh ở thành phố Lai-xích (Leipzig), là con trai một giáo sư triết học. Từ lúc 6 tuổi ông đã suốt ngày mê mải đọc sách. Năm ông 7 tuổi thì cha ông qua đời. Năm 15 tuổi ông đã vào đại học và học về luật học, triết học và toán học. Năm 20 tuổi (năm 1666) ông đã bảo vệ luận án tiến sĩ luật học đồng thời cũng công bố công trình toán học đầu tiên của mình với nhan đề : "Những suy nghĩ về nghệ thuật tổ hợp". Sau đó ông được bổ nhiệm làm quan chức ngoại giao tại Pháp.

Gottfried Leibniz
(1646 – 1716)

Những cống hiến về toán học chỉ là một phần nhỏ trong sự nghiệp của ông. Ở thời đại ông, người ta biết đến ông như một nhà ngoại giao, nhà luật học và nhà triết học. Ông biết rất nhiều ngoại ngữ và hầu hết các kiến thức của ông đều có được bằng con đường tự học.

Lai-bơ-nit được người đương thời mô tả là có thể trạng gày gò, tầm thước, da xanh và cũng luôn đeo tóc giả. Trí nhớ của ông cũng khác người thường : Những điều khó hiểu được ông nhớ rất tốt nhưng những điều dễ hiểu thì ông lại quên ngay.

Luyện tập

34. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị các hàm số $y = x$, $y = 1$ và $y = \frac{x^2}{4}$ trong miền $x \geq 0$, $y \leq 1$;

b) Đồ thị hai hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 4$, $y = x^2$, trục tung và đường thẳng $x = 1$;

c) Đồ thị các hàm số $y = x^2$, $y = 4x - 4$ và $y = -4x - 4$.

35. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị hai hàm số $y = x^2 + 1$ và $y = 3 - x$;

b) Các đường $x = y^3$, $y = 1$ và $x = 8$;

c) Đồ thị hai hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$ và trục hoành.

36. Tính thể tích của vật thể T nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \leq x \leq \pi)$ là một hình vuông cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.

37. Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 2$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành.

38. Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{4}$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành.

39. Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $y = xe^{\frac{x}{2}}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành.

40. Cho hình phẳng B giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{2\sin 2y}$, $x = 0$, $y = 0$ và $y = \frac{\pi}{2}$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình B quanh trục tung.