

Câu hỏi và bài tập ôn tập cuối năm

I - BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. a) Chứng minh rằng hàm số $f(x) = e^x - x - 1$ đồng biến trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$.
b) Từ đó, suy ra $e^x > x + 1$ với mọi $x > 0$.
2. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 10$.
b) Chứng minh rằng phương trình $2x^3 - 3x^2 - 12x - 10 = 0$ có nghiệm thực duy nhất.
c) Gọi nghiệm thực duy nhất của phương trình là α . Chứng minh rằng $3,5 < \alpha < 3,6$.
3. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \ln x$ và (D) là một tiếp tuyến bất kì của (C) . Chứng minh rằng trên khoảng $(0 ; +\infty)$, (C) nằm ở phía dưới của đường thẳng (D) .

4. Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 3600 bản in trong một giờ. Chi phí để vận hành một máy trong mỗi lần in là 50 nghìn đồng. Chi phí cho n máy chạy trong một giờ là $10(6n + 10)$ nghìn đồng.

Hỏi nếu in 50000 tờ quảng cáo thì phải sử dụng bao nhiêu máy để được lãi nhiều nhất ?

5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 6}}$ trên đoạn $[0 ; 1]$.

6. a) Cho $P(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ và hai số a, b thoả mãn $a + b = 1$. Hãy tính $P(a) + P(b)$.

b) Hãy so sánh $A = \sqrt[3]{18}$ và $B = \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2} \log_{\sqrt{6}} 5}$.

7. a) Chứng minh rằng nếu a và b là hai số dương thoả mãn $a^2 + b^2 = 7ab$ thì $\log_7 \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_7 a + \log_7 b)$.

b) Biết a và b là hai số dương, $a \neq 1$ sao cho $\log_a b = \sqrt{3}$. Hãy tính $\log_{a\sqrt{b}} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b^3}}$.

8. a) Tìm đạo hàm của các hàm số $y = \cos x \cdot e^{2\tan x}$ và $y = \log_2(\sin x)$.

b) Chứng minh rằng hàm số $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ thoả mãn hệ thức $y''' - 13y' - 12y = 0$.

9. a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = 2^x$, $y = (\sqrt{2})^x$ và $y = (\sqrt{3})^x$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ. Hãy nêu nhận xét về vị trí tương đối của ba đồ thị đó.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_3 x$. Từ đó hãy suy ra đồ thị của hàm số $y = 2 + \log_3 x$ và đồ thị của hàm số $y = \log_3(x + 2)$.

10. Giải các phương trình và hệ phương trình sau :

a) $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$;

b) $\log_3 \left(\log_{\frac{1}{2}} x - 3 \log_{\frac{1}{2}} x + 5 \right) = 2$;

$$\text{c) } 4^{\log x+1} - 6^{\log x} - 2 \cdot 3^{\log x^2+2} = 0 ; \quad \text{d) } \begin{cases} 2^x 8^{-y} = 2\sqrt{2}, \\ \log_9 \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \log_3(9y). \end{cases}$$

11. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \log[1 - \log(x^2 - 5x + 16)] ;$

b) $y = \sqrt{\log_{0,5}(-x^2 + x + 6)} + \frac{1}{x^2 + 2x}.$

12. Tìm nguyên hàm của mỗi hàm số sau :

a) $y = x^3(1 + x^4)^3 ;$ b) $y = \cos x \sin 2x ;$ c) $y = \frac{x}{\cos^2 x}.$

13. Tìm hàm số f , biết rằng $f'(x) = 8 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ và $f(0) = 8$.

14. Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} ;$ b) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1} ;$ c) $\int_0^1 x^2 e^x dx.$

15. Tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi các đường

a) $y + x^2 = 0$ và $y + 3x^2 = 2 ;$

b) $y^2 - 4x = 4$ và $4x - y = 16.$

16. a) Cho hình thang cong A giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$ và $x = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo được khi quay A quanh trục hoành.

b) Cho hình phẳng B giới hạn bởi parabol $y = x^2 + 1$ và đường thẳng $y = 2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo được khi quay B quanh trục tung.

17. Cho các số phức $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - 2i$. Hãy tính và biểu diễn hình học các số phức :

$$z_1^2 ; z_1 z_2 ; 2z_1 - z_2 ; z_1 \bar{z}_2 \quad \text{và} \quad \frac{z_2}{z_1}.$$

18. Tính :

a) $(\sqrt{3} + i)^2 - (\sqrt{3} - i)^2$;

b) $(\sqrt{3} + i)^2 + (\sqrt{3} - i)^2$;

c) $(\sqrt{3} + i)^3 - (\sqrt{3} - i)^3$;

d) $\frac{(\sqrt{3} + i)^2}{(\sqrt{3} - i)^2}$.

19. a) Xác định phần thực của số phức $\frac{z+1}{z-1}$, biết rằng $|z|=1$ và $z \neq 1$.

b) Chứng minh rằng nếu $\frac{z+1}{z-1}$ là số ảo thì $|z|=1$.

20. Xác định tập hợp các điểm M trên mặt phẳng phức biểu diễn các số phức $(1+i\sqrt{3})z+2$, trong đó $|z-1| \leq 2$.

21. Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức :

$-8+6i$; $3+4i$ và $1-2\sqrt{2}i$.

22. Giải các phương trình sau trên \mathbb{C} :

a) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$;

b) $z^2 - (\cos \varphi + i \sin \varphi)z + i \sin \varphi \cos \varphi = 0$,

trong đó φ là số thực cho trước.

23. Tính $\left(\frac{4i}{1+i\sqrt{3}}\right)^6$ và $\frac{(\sqrt{3}+i)^5}{(1-i\sqrt{3})^{11}}$.

II - BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong mỗi bài tập dưới đây, hãy chọn một phương án trong các phương án đã cho để được khẳng định đúng.

24. Hàm số $f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1}$

(A) Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$;

(B) Nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$;

(C) Đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(3 ; +\infty)$;

(D) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(3 ; +\infty)$.

25. Hàm số $f(x) = \sin^2 x - 2 \sin x$ có giá trị nhỏ nhất là

(A) $-\frac{1}{2}$; (B) 0 ; (C) -1 ; (D) $-\frac{1}{3}$.

26. Gọi (\mathcal{C}) là đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x^2 + x}$. Khi đó

(A) Đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của (\mathcal{C}) (khi $x \rightarrow +\infty$) ;

(B) Đường thẳng $y = x + \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên của (\mathcal{C}) (khi $x \rightarrow +\infty$) ;

(C) Đường thẳng $y = -x$ là tiệm cận xiên của (\mathcal{C}) (khi $x \rightarrow +\infty$) ;

(D) Đồ thị (\mathcal{C}) không có tiệm cận xiên (khi $x \rightarrow +\infty$).

27. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 1$ tiếp xúc tại điểm $(1 ; 1)$ với

(A) Parabol $y = 2x^2 - 1$; (B) Parabol $y = x^2$;

(C) Parabol $y = -x^2 + 2x$; (D) Đường thẳng $y = 2x + 1$.

28. Cho hai số dương a và b . Đặt $X = \ln \frac{a+b}{2}$ và $Y = \frac{\ln a + \ln b}{2}$. Khi đó

(A) $X > Y$; (B) $X < Y$;

(C) $X \geq Y$; (D) $X \leq Y$.

29. Cho hai số không âm a và b . Đặt $X = e^{\frac{a+b}{2}}$ và $Y = \frac{e^a + e^b}{2}$. Khi đó

(A) $X > Y$; (B) $X < Y$;

(C) $X \geq Y$; (D) $X \leq Y$.

30. Cho (\mathcal{G}) là đồ thị của hàm số $y = \log_2 x$. Ta có thể suy ra đồ thị của hàm số $y = \log_2 2(x+3)$ bằng cách tịnh tiến (\mathcal{G}) theo vectơ

(A) $\vec{v} = (3 ; 1)$; (B) $\vec{v} = (3 ; -1)$;

(C) $\vec{v} = (-3 ; 1)$ (D) $\vec{v} = (-3 ; -1)$.

31. Cho hàm số $f(x) = \log_5(x^2 + 1)$. Khi đó

(A) $f'(1) = \frac{1}{2\ln 5}$;

(B) $f'(1) = \frac{1}{\ln 5}$;

(C) $f'(1) = \frac{3}{2\ln 5}$;

(D) $f'(1) = \frac{2}{\ln 5}$.

32. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = a^x$ và đồ thị của hàm số $y = \log_b x$ cắt nhau tại điểm $(\sqrt{2^{-1}}; \sqrt{2})$. Khi đó

(A) $a > 1$ và $b > 1$;

(B) $a > 1$ và $0 < b < 1$;

(C) $0 < a < 1$ và $b > 1$;

(D) $0 < a < 1$ và $0 < b < 1$.

33. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$. Khi đó

(A) $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$;

(B) $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C$;

(C) $\int f(x)dx = 2x^3 - \frac{3}{x} + C$;

(D) $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{2x} + C$.

34. Đẳng thức

$$\int_0^a \cos(x + a^2)dx = \sin a$$

Xảy ra nếu

(A) $a = \pi$;

(B) $a = \sqrt{\pi}$;

(C) $a = \sqrt{3\pi}$;

(D) $a = \sqrt{2\pi}$.

35. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thoả mãn điều kiện

$$\int_1^e \ln \frac{k}{x} dx < e - 2.$$

Khi đó

(A) $S = \{1\}$;

(B) $S = \{2\}$;

(C) $S = \{1; 2\}$;

(D) $S = \emptyset$.

36. Cho số phức z tùy ý. Xét các số phức $\alpha = z^2 + (\bar{z})^2$ và $\beta = z\bar{z} + i(z - \bar{z})$.
Khi đó

- (A) α là số thực, β là số thực ; (B) α là số thực, β là số ảo ;
(C) α là số ảo, β là số thực ; (D) α là số ảo, β là số ảo.

37. Cho số phức tùy ý $z \neq 1$. Xét các số phức

$$\alpha = \frac{i^{2005} - i}{\bar{z} - 1} - z^2 + (\bar{z})^2 \text{ và } \beta = \frac{z^3 - z}{z - 1} + (\bar{z})^2 + \bar{z}.$$

Khi đó

- (A) α là số thực, β là số thực ; (B) α là số thực, β là số ảo ;
(C) α là số ảo, β là số thực ; (D) α là số ảo, β là số ảo.

38. Nếu môđun của số phức z bằng r ($r > 0$) thì môđun của số phức $(1 - i)^2 z$ bằng

- (A) $4r$; (B) $2r$;
(C) $r\sqrt{2}$; (D) r .