§ 2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bài này giới thiệu khái niệm cực đại, cực tiểu của hàm số và xét quan hệ giữa cực đại, cực tiểu với dấu của đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai của hàm số.

1. Khái niệm cực trị của hàm số

ĐỊNH NGHĨA

Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$) và $x_0 \in \mathcal{D}$.

a) x_0 được gọi là một **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a\,;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a\,;b) \subset \mathcal{D}$ và

$$f(x) < f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a\,;b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.

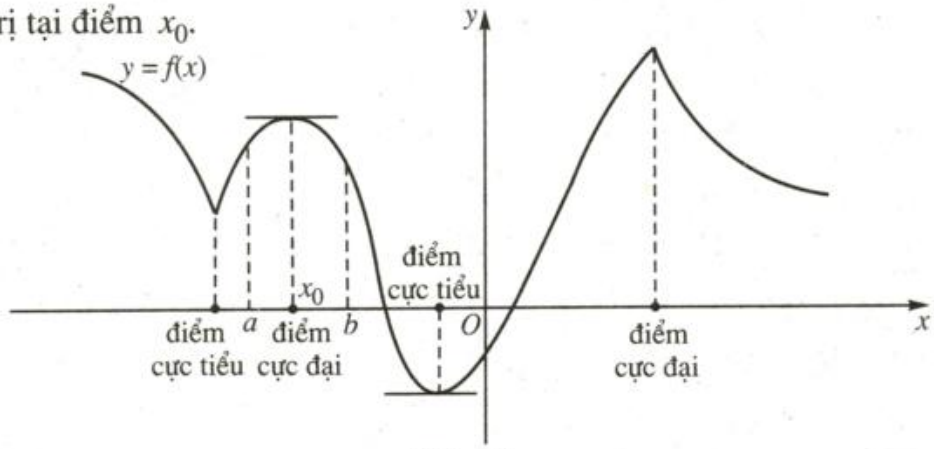
b) x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a\,;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a\,;b) \subset \mathcal{D}$ và

$$f(x) > f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a\,;b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.

Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **cực trị**.

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0.



Hình 1.1

CHÚ Ý

1) Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số f nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập hợp $\mathcal{D}$; $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên một khoảng $(a\,;b)$ nào đó chứa điểm x_0.

2) Hàm số f có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập hợp $\mathcal{D}$. Trên đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trong hình 1.1, ta thấy hàm số có hai điểm cực tiểu và hai điểm cực đại. Hàm số cũng có thể không có cực trị trên một tập hợp số thực cho trước.

3) Đôi khi người ta cũng nói đến điểm cực trị của đồ thị.

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì điểm $(x_0\,;f(x_0))$ được gọi là *điểm cực trị của đồ thị* hàm số f.

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Quan sát đồ thị của hàm số $y = f(x)$ (h.1.1), ta thấy nếu hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 và nếu đồ thị của hàm số có tiếp tuyến tại điểm $(x_0\,;f(x_0))$ thì tiếp tuyến đó song song với trục hoành, tức là $f'(x_0) = 0$.

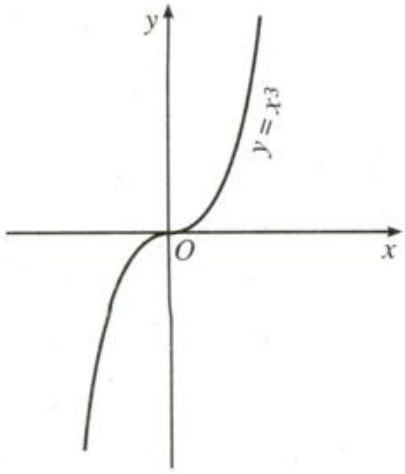
Đó là nội dung của định lí mà ta thừa nhận sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

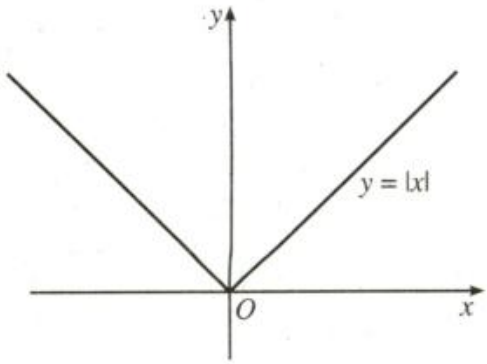
> Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Điều ngược lại có thể không đúng. Đạo hàm f' có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.

Chẳng hạn, xét hàm số $f(x) = x^3$, ta có $f'(x) = 3x^2$ và $f'(0) = 0$. Tuy nhiên, hàm số f không đạt cực trị tại điểm $x = 0$. Thật vậy, vì $f'(x) > 0$ với mọi $x \neq 0$ nên hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$ (h.1.2).



Hình 1.2



Hình 1.3

CHÚ Ý

Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm. Chẳng hạn, hàm số $y = f(x) = |x|$ xác định trên $\mathbb{R}$. Vì $f(0) = 0$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \neq 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

Dễ thấy hàm số $y = |x|$ không có đạo hàm tại điểm $x = 0$ (h.1.3).

Như vậy, một hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0, hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

Định lí sau cho ta một điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị.

ĐỊNH LÍ 2

Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a\,;\,b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a\,;\,x_0)$ và $(x_0\,;\,b)$. Khi đó

a) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a\,;\,x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0\,;\,b)$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a\,;\,x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0\,;\,b)$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

Nói một cách khác,

a) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

b) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

Chứng minh

a) Vì hàm số f liên tục trên nửa khoảng $(a\,;x_0]$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a\,;x_0)$ nên hàm số f nghịch biến trên $(a\,;x_0]$. Do đó

$$f(x) > f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a\,;x_0).$$

Tương tự, vì hàm số f liên tục trên nửa khoảng $[x_0\,;b)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0\,;b)$ nên hàm số đồng biến trên $[x_0\,;b)$. Do đó

$$f(x) > f(x_0) \text{ với mọi } x \in (x_0\,;b).$$

Vậy $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (a\,;b) \setminus \{x_0\}$, tức là hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

b) Phần b) được chứng minh tương tự. □

Định lí 2 được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau :

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘	$f(x_0)$ (cực tiểu)	↗	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		↗	$f(x_0)$ (cực đại)	↘	

Từ định lí 2 ta có quy tắc tìm cực trị sau đây.

QUY TẮC 1

1. Tìm $f'(x)$.

2. Tìm các điểm x_i $(i = 1, 2,...)$ tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàı số liên tục nhưng không có đạo hàm.

3. Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Ví dụ 1. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}.$$

Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\quad f'(x) = x^2 - 2x - 3.$

Từ đó $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3.$

Sau đây là bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	$-7\frac{2}{3}$	$\nearrow$	

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$, giá trị cực đại của hàm số là $f(-1) = 3$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$, giá trị cực tiểu của hàm số là $f(3) = -7\frac{2}{3}$.

H1 *Tìm cực trị của hàm số*

$$f(x) = x + \frac{4}{x} - 3.$$

Ví dụ 2. Áp dụng quy tắc 1 tìm cực trị của hàm số

$$f(x) = |x|.$$

Giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $$f(x) = \begin{cases} -x \text{ với } x < 0 \\ x \text{ với } x \geq 0. \end{cases}$$

Do đó $$f'(x) = \begin{cases} -1 \text{ với } x < 0 \\ 1 \text{ với } x > 0. \end{cases}$$

(Hàm số f không có đạo hàm tại điểm $x = 0$).

Sau đây là bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và giá trị cực tiểu của hàm số là $f(0) = 0$. □

Có thể sử dụng đạo hàm cấp hai để tìm cực trị của hàm số. Người ta đã chứng minh định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 3

> Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a\,;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.
>
> a) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.
>
> b) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Từ định lí 3, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số (nếu hàm số có đạo hàm cấp hai).

QUY TẮC 2

1. Tìm $f'(x)$.

2. Tìm các nghiệm x_i $(i = 1, 2,...)$ của phương trình $f'(x) = 0$.

3. Tìm $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.

Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i.

Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i.

Ví dụ 3. Áp dụng quy tắc 2 tìm cực trị của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}.$$

Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = x^2 - 2x - 3$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$;

$f''(x) = 2x - 2$.

Vì $f''(-1) = -4 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$, $f(-1) = 3$.

Vì $f''(3) = 4 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$, $f(3) = -7\frac{2}{3}$.

Ta nhận được các kết quả đã biết trong ví dụ 1.

H2 *Tìm cực trị của hàm số*

$$f(x) = 2\sin 2x - 3.$$

Câu hỏi và bài tập

11. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$;

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 10$;

c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;

d) $f(x) = |x|(x + 2)$;

e) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$;

f) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

12. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = x\sqrt{4 - x^2}$;

b) $y = \sqrt{8 - x^2}$;

c) $y = x - \sin 2x + 2$;

d) $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$.

13. Tìm các hệ số a, b, c, d của hàm số

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

sao cho hàm số f đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1, f(1) = 1$.

14. Xác định các hệ số a, b, c sao cho hàm số

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1 ; 0)$.

15. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, hàm số

$$y = \frac{x^2 - m(m + 1)x + m^3 + 1}{x - m}$$

luôn có cực đại và cực tiểu.