§ 3 DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG

1. Số phức dưới dạng lượng giác

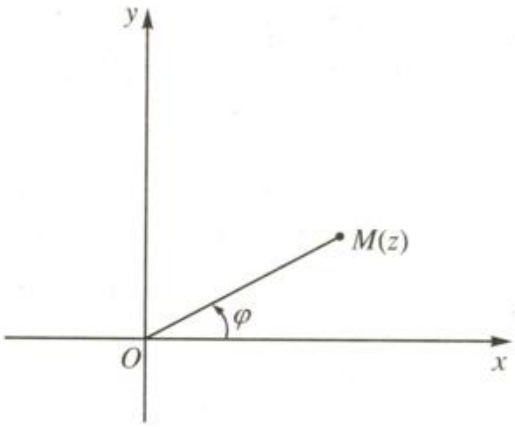
a) Acgumen của số phức $z \neq 0$

ĐỊNH NGHĨA 1

Cho số phức $z \neq 0$. Gọi M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số z. Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM được gọi là một **acgumen của z**.

CHÚ Ý

Nếu φ là một acgumen của z (h.4.5) thì mọi acgumen của z có dạng $\varphi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (Người ta thường nói : Acgumen của $z \neq 0$ xác định sai khác $k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).



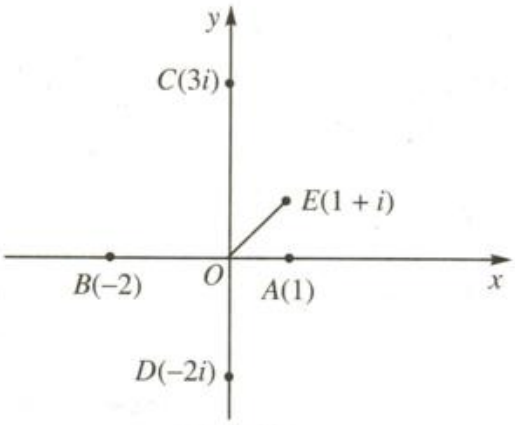
Hình 4.5

Ví dụ 1 (h.4.6).

a) Số thực dương tuỳ ý có một acgumen là 0.

b) Số thực âm tuỳ ý có một acgumen là π.

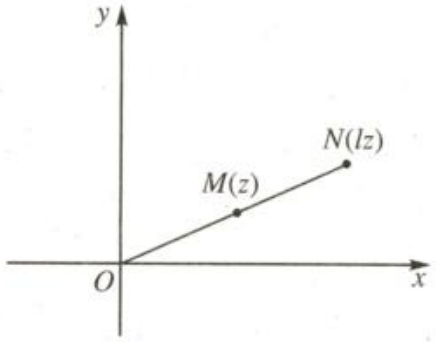
c) Các số $3i$, $-2i$ và $1 + i$ theo thứ tự có một acgumen là $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ và $\frac{\pi}{4}$.



Hình 4.6

Nhận xét

Hai số phức z và lz (với $z \neq 0$ và l là số thực dương) có acgumen sai khác $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, vì các điểm biểu diễn của chúng cùng thuộc một tia gốc O (h.4.7).



Hình 4.7

H1 *Biết số phức $z \neq 0$ có một acgumen là φ. Hãy tìm một acgumen của mỗi số phức sau :*

$$-z \ ; \ \overline{z} \ ; \ -\overline{z} \ ; \ \frac{1}{z} \text{ (để ý rằng } \frac{1}{z} = \frac{1}{z\overline{z}}\overline{z}\text{).}$$

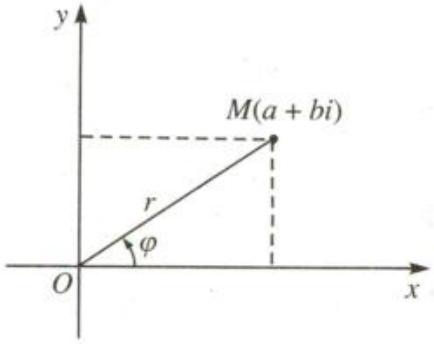
b) Dạng lượng giác của số phức

Xét số phức $z = a + bi \neq 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

Kí hiệu r là môđun của z và φ là một acgumen của z (h.4.8) thì dễ thấy rằng :

$$a = r\cos\varphi, \ b = r\sin\varphi.$$

Vậy $z = a + bi \neq 0$ có thể viết dưới dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.



Hình 4.8

Ta có

ĐỊNH NGHĨA 2

Dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, trong đó $r > 0$, được gọi là **dạng lượng giác của số phức** $z \neq 0$. Còn dạng $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ được gọi là *dạng đại số của số phức z*.

Nhận xét. Để tìm dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ khác 0 cho trước, ta cần :

1) Tìm r : đó là môđun của z, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; số r đó cũng là khoảng cách từ gốc O đến điểm M biểu diễn số z trong mặt phẳng phức.

2) Tìm φ : đó là một acgumen của z; φ là số thực sao cho $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ và $\sin\varphi = \frac{b}{r}$; số φ đó cũng là số đo một góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM.

Ví dụ 2

a) Số 2 có môđun bằng 2, có một acgumen bằng 0 nên nó có dạng lượng giác $2(\cos 0 + i\sin 0)$;

b) Số -2 có môđun bằng 2, có một acgumen bằng π nên nó có dạng lượng giác $2(\cos\pi + i\sin\pi)$;

c) Số i có môđun bằng 1, có một acgumen bằng $\frac{\pi}{2}$ nên nó có dạng lượng giác $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$;

d) Số $1 + i$ có môđun bằng $\sqrt{2}$, có một acgumen bằng $\frac{\pi}{4}$ nên nó có dạng lượng giác $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

e) Số $1 - \sqrt{3}i$ có môđun bằng $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, có một acgumen là φ sao cho $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. Lấy $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ thì

$$1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

CHÚ Ý

1) $|z| = 1$ khi và chỉ khi $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ $(\varphi \in \mathbb{R})$.

2) Khi $z = 0$ thì $|z| = r = 0$ nhưng acgumen của z không xác định (đôi khi coi acgumen của 0 là số thực tuỳ ý và vẫn viết $0 = 0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$).

3) Cần để ý đòi hỏi $r > 0$ trong dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ của số phức $z \neq 0$.

Ví dụ 3

a) Số phức $-(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ có dạng lượng giác là

$$\cos(\varphi + \pi) + i\sin(\varphi + \pi).$$

b) Số phức $\cos\varphi - i\sin\varphi$ có dạng lượng giác là

$$\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi).$$

H2 *Cho $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r > 0)$, tìm môđun và một acgumen của $\frac{1}{z}$, từ đó suy ra dạng lượng giác của $\frac{1}{z}$.*

2. Nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác

Ta đã biết công thức nhân và chia số phức dưới dạng đại số. Sau đây là định lí nêu lên công thức nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác ; chúng cho các quy tắc tính toán đơn giản về nhân và chia số phức.

ĐỊNH LÍ

Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

$z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ $(r \geq 0, r' \geq 0)$,

thì $zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$,

$\dfrac{z'}{z} = \dfrac{r'}{r}[\cos(\varphi' - \varphi) + i\sin(\varphi' - \varphi)]$ (khi $r > 0$).

Nói một cách khác, để nhân các số phức dưới dạng lượng giác, ta lấy tích các môđun và tổng các acgumen ; để chia các số phức dưới dạng lượng giác ta lấy thương các môđun và hiệu các acgumen.

Chứng minh

$$\begin{aligned} zz' &= [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)][r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')] \\ &= rr'[\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi')] \\ &= rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$. Theo công thức nhân số phức, ta có

$$\frac{z'}{z} = z'\frac{1}{z} = \frac{r'}{r}[\cos(\varphi' - \varphi) + i\sin(\varphi' - \varphi)]. \qquad \square$$

Ví dụ 4. Ta có $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

và $\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$,

nên
$$\begin{aligned} \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

Nhận xét. Nếu thực hiện phép chia trong ví dụ 4 dưới dạng đại số, ta được

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{1}{4}\left[1+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)i\right]$$ nên từ kết quả trên suy ra

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}, \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

3. Công thức Moa-vrơ (Moivre) và ứng dụng

a) Công thức Moa-vrơ

A. De Moivre
(1667 – 1754)

Từ công thức nhân số phức dưới dạng lượng giác, bằng quy nạp toán học dễ dàng suy ra rằng với mọi số nguyên dương n,

$$\boxed{[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

và khi $r = 1$, ta có

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.}$$

Cả hai công thức đó đều được gọi là *công thức Moa-vrơ.*

Ví dụ 5. $(1+i)^5 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^5$

$$= (\sqrt{2})^5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= -4(1+i).$$

b) Ứng dụng vào lượng giác

Công thức khai triển luỹ thừa bậc ba của nhị thức $\cos\varphi + i\sin\varphi$ cho ta

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi(i\sin\varphi) + 3\cos\varphi(i\sin\varphi)^2 + (i\sin\varphi)^3$$
$$= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi).$$

Mặt khác, theo công thức Moa-vrơ,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Từ đó suy ra

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

Tương tự, bằng cách đối chiếu công thức khai triển luỹ thừa bậc n của nhị thức $\cos\varphi + i\sin\varphi$ với công thức Moa-vrơ, có thể biểu diễn $\cos n\varphi$ và $\sin n\varphi$ theo các luỹ thừa của $\cos\varphi$, $\sin\varphi$.

c) Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác

Từ công thức Moa-vrơ, dễ thấy số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$ có hai căn bậc hai là

$$\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$$

và $$-\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}) = \sqrt{r}\left(\cos(\frac{\varphi}{2} + \pi) + i\sin(\frac{\varphi}{2} + \pi)\right).$$

Câu hỏi và bài tập

27. Hãy tìm dạng lượng giác của các số phức : $\overline{z}$; $-z$; $\frac{1}{\overline{z}}$; kz $(k \in \mathbb{R}^*)$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r > 0)$;

b) $z = 1 + \sqrt{3}\,i$.

28. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác :

a) $1 - i\sqrt{3}$; $1 + i$; $(1 - i\sqrt{3})(1 + i)$; $\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$;

b) $2i(\sqrt{3} - i)$;

c) $\frac{1}{2 + 2i}$;

d) $z = \sin\varphi + i\cos\varphi$ $(\varphi \in \mathbb{R})$.

Chú ý. Có thể dùng máy tính bỏ túi để chuyển đổi dạng đại số với dạng lượng giác của số phức $z \neq 0$. Chẳng hạn, dùng máy tính bỏ túi CASIO *fx* – 500MS để :

1) Đổi từ dạng đại số $z = 1 + \sqrt{3}i$ thành dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ thì (đặt ở chế độ "rađian") ấn liên tiếp

[Pol(] 1 [,] [√] 3 [)] [=] : trên màn hình hiện 2 (tức là $r = 2$) ; ấn tiếp

[RCL] [F] : trên màn hình hiện F = 1,047197551 (tức là $\varphi \approx \frac{\pi}{3}$).

2) Đổi từ dạng lượng giác $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ thành dạng đại số $z = a + bi$ thì (đặt ở chế độ "rađian") ấn liên tiếp

[SHIFT] [Rec(] 2 [,] [SHIFT] [π] [÷] 3 [)] [=]

trên màn hình hiện 1 (tức $a = 1$) ; ấn tiếp

[RCL] [F] : trên màn hình hiện F = 1,732050808 (tức là $b \approx \sqrt{3}$).

29. Dùng công thức khai triển nhị thức Niu-tơn $(1 + i)^{19}$ và công thức Moa-vrơ để tính $C_{19}^0 - C_{19}^2 + C_{19}^4 - ... + C_{19}^{16} - C_{19}^{18}$.

30. Gọi M, M' là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số $z = 3 + i$, $z' = (3 - \sqrt{3}) + (1 + 3\sqrt{3})i$.

a) Tính $\frac{z'}{z}$.

b) Chứng minh rằng hiệu số acgumen của z' với acgumen của z là một số đo của góc lượng giác (OM, OM'). Tính số đo đó.

31. Cho các số phức $w = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ và $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$.

a) Chứng minh rằng $z_0 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, $z_1 = z_0\varepsilon$, $z_2 = z_0\varepsilon^2$ là các nghiệm của phương trình $z^3 - w = 0$.

b) Biểu diễn hình học các số phức z_0, z_1, z_2.

Luyện tập

32. Sử dụng công thức Moa-vrơ để tính $\sin 4\varphi$ và $\cos 4\varphi$ theo các luỹ thừa của $\sin\varphi$ và $\cos\varphi$.

33. Tính

$$(\sqrt{3} - i)^6 \ ; \qquad \left(\frac{i}{1+i}\right)^{2004} \ ; \qquad \left(\frac{5 + 3i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}}\right)^{21}$$

34. Cho số phức $w = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. Tìm các số nguyên dương n để w^n là số thực.

Hỏi có chăng một số nguyên dương m để w^m là số ảo ?

35. Viết dạng lượng giác của số phức z và của các căn bậc hai của z cho mỗi trường hợp sau :

a) $|z| = 3$ và một acgumen của iz là $\frac{5\pi}{4}$;

b) $|z| = \frac{1}{3}$ và một acgumen của $\frac{\overline{z}}{1+i}$ là $-\frac{3\pi}{4}$.

36. Viết dạng lượng giác của các số phức sau :

a) $1 - i\tan\frac{\pi}{5}$; b) $\tan\frac{5\pi}{8} + i$;

c) $1 - \cos\varphi - i\sin\varphi$ $(\varphi \in \mathbb{R}, \varphi \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z})$.

Bài đọc thêm

CĂN BẬC *n* CỦA SỐ PHỨC

Tương tự định nghĩa căn bậc hai của số phức, ta gọi số phức z sao cho $z^n = w$ là một **căn bậc *n* của số phức** w (n là số nguyên cho trước, $n > 1$).

Rõ ràng chỉ có một căn bậc n của $w = 0$ là 0.

Khi $w \neq 0$, ta viết w dưới dạng lượng giác $w = R(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $R > 0$. Ta cần tìm $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $(r > 0)$ sao cho $z^n = w$.

Theo công thức Moa-vrơ, $z^n = w$ có nghĩa là

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = R(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

tức là $r^n = R$ và $n\varphi = \alpha + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Từ đó $r = \sqrt[n]{R}$, $\varphi = \dfrac{\alpha + k2\pi}{n}$; tức là

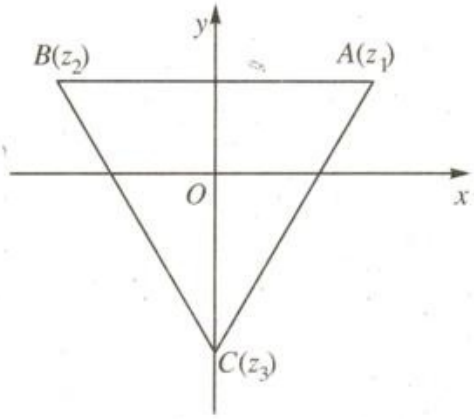
$$z = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)\right].$$

Lấy $k = 0, 1, \ldots, n-1$, ta được n căn bậc n phân biệt của w.

Ví dụ

Số $w = i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$ có ba căn bậc ba là

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i);$$
$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i);$$
$$z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) = -i;$$



Hình 4.9

(trên hình 4.9 có ba điểm A, B, C theo thứ tự biểu diễn z_1, z_2, z_3).

Chú ý : Nếu $w \neq 0$ thì các căn bậc n ($n \geq 3$ cho trước) của w được biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi các đỉnh của một n-giác đều nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $\sqrt[n]{|w|}$.