§ 5 ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang

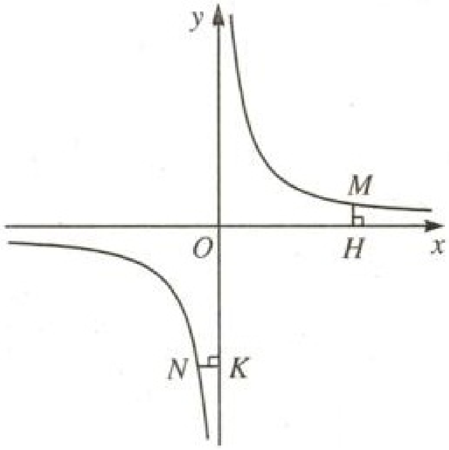
Ta đã biết đồ thị của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ là đường hypebol gồm hai nhánh nằm trong góc phần tư thứ nhất và thứ ba của mặt phẳng toạ độ (h.1.6).

Ta có

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

và $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Điều đó có nghĩa là khoảng cách $MH = |f(x)|$ từ điểm M của đồ thị đến trục hoành dần đến 0 khi điểm M theo đường hypebol đi xa ra vô tận về phía phải hoặc phía trái.



Hình 1.6

Người ta gọi trục hoành là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$.

Ta cũng có

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Điều đó có nghĩa là khoảng cách $NK = |x|$ từ một điểm N của đồ thị đến trục tung dần đến 0 khi điểm N theo đồ thị đi xa ra vô tận về phía trên hoặc phía dưới. Người ta gọi trục tung là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$.

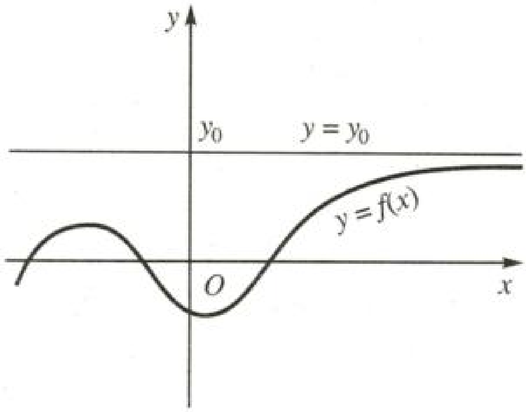
Một cách tổng quát, ta có

ĐỊNH NGHĨA 1

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** (gọi tắt là **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

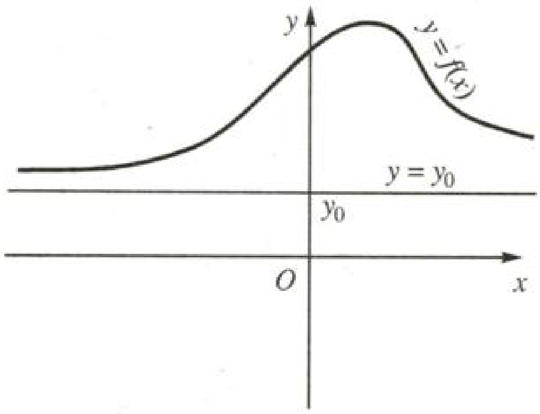
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0.$$

(Xem hình 1.7).



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$).

a)



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

b)

Hình 1.7

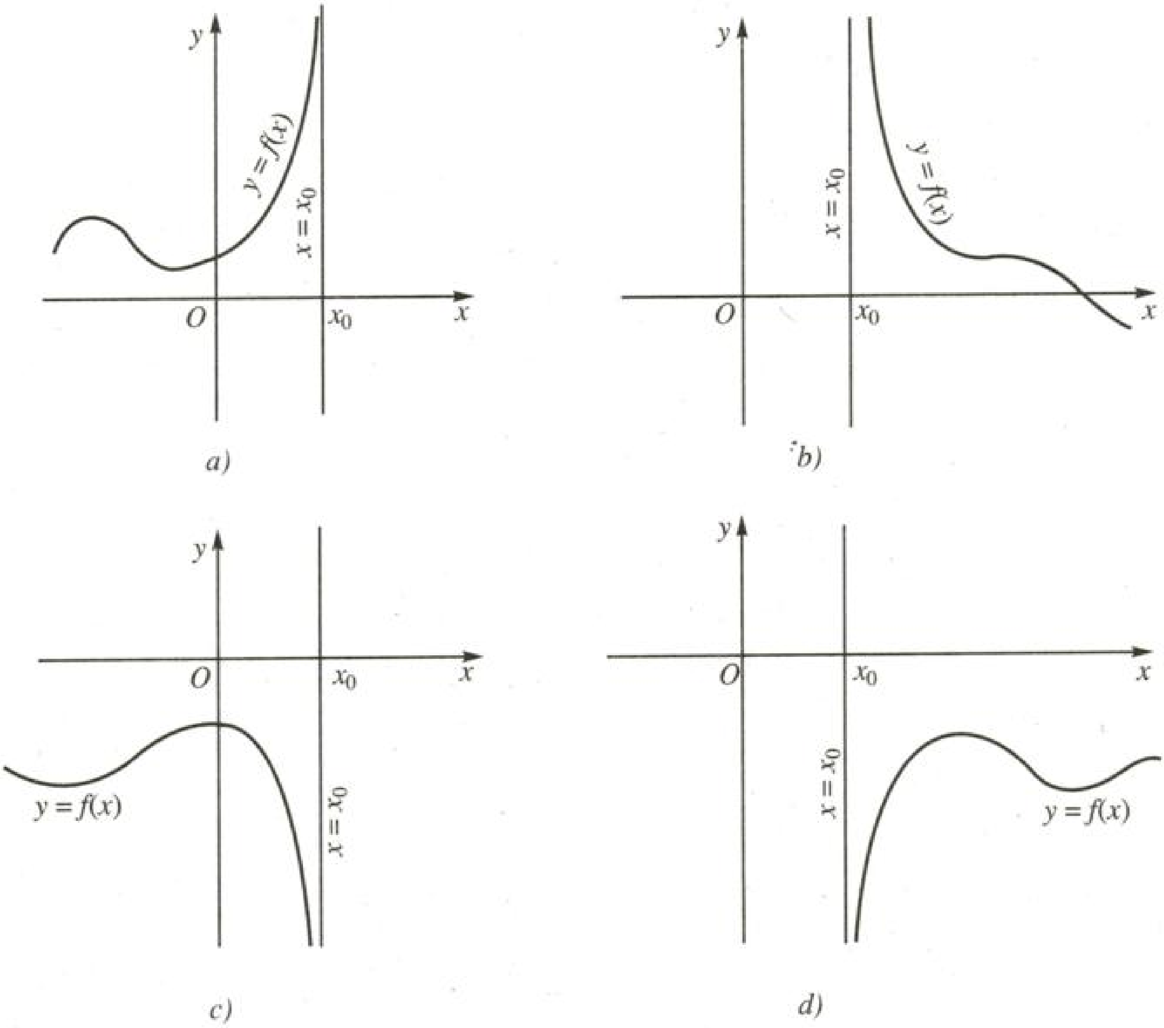
ĐỊNH NGHĨA 2

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (gọi tắt là **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \; ; \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \; ;$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \; ; \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

(Xem hình 1.8).



a) và c). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0^-$).

b) và d). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0^+$).

Hình 1.8

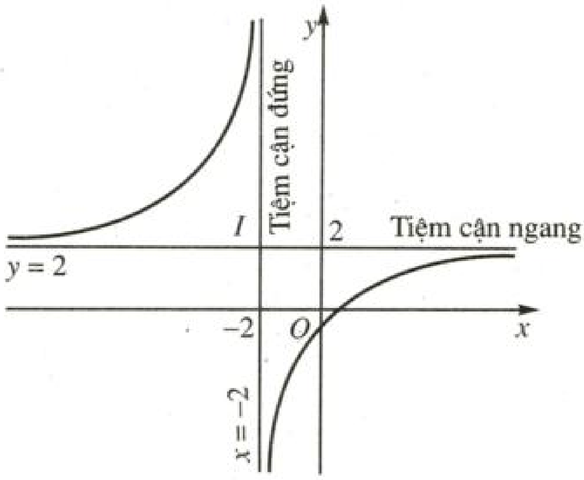
Ví dụ 1. Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$.

Giải

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 2$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$ và khi $x \to -\infty$).

Vì $\lim\limits_{x \to (-2)^+} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to (-2)^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to (-2)^+$ và khi $x \to (-2)^-$) (h.1.9).



Hình 1.9

Ví dụ 2. Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

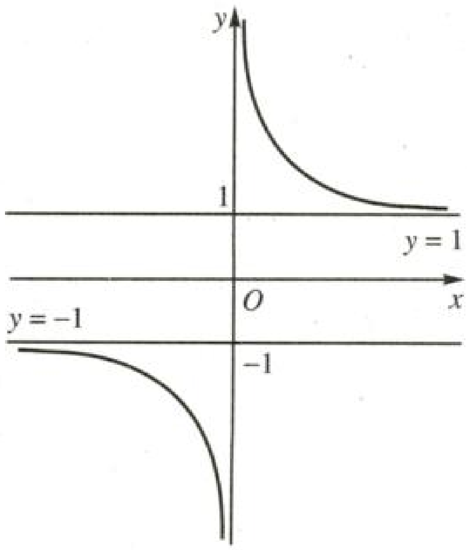
Giải

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1.$$

Do đó, đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$).



Hình 1.10

Tương tự, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x} = -\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = -1.$

Do đó, đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to 0^+$ và khi $x \to 0^-$) (h.1.10).

H1 *Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số* $y = \dfrac{5-3x^2}{1-x^2}$.

2. Đường tiệm cận xiên

Cho $(\mathscr{C})$ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và (d) là đường thẳng

$$y = ax + b \qquad (a \neq 0).$$

Gọi M và N là hai điểm của $(\mathscr{C})$ và (d) có cùng hoành độ x (h.1.11). Nếu độ dài của đoạn thẳng MN dần đến 0 khi x dần đến $+\infty$ (hoặc khi x dần đến $-\infty$) thì đường thẳng (d) được gọi là đường tiệm cận xiên của $(\mathscr{C})$.

Vì $MN = |f(x) - (ax+b)|$ nên ta có định nghĩa sau :

ĐỊNH NGHĨA 3

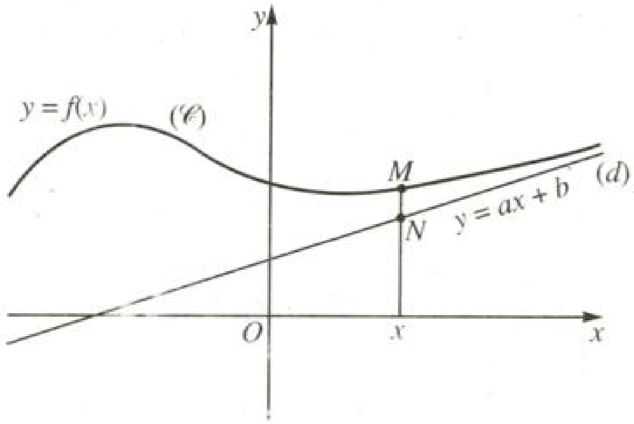
Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (gọi tắt là **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0,$$

hoặc

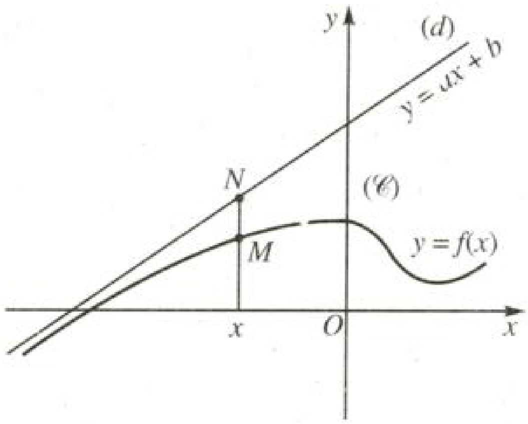
$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0.$$

(Xem hình 1.11).



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$).

a)



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

b)

Hình 1.11

Ví dụ 3. Đồ thị hàm số

$$f(x) = x + \frac{x}{x^2 - 1}$$

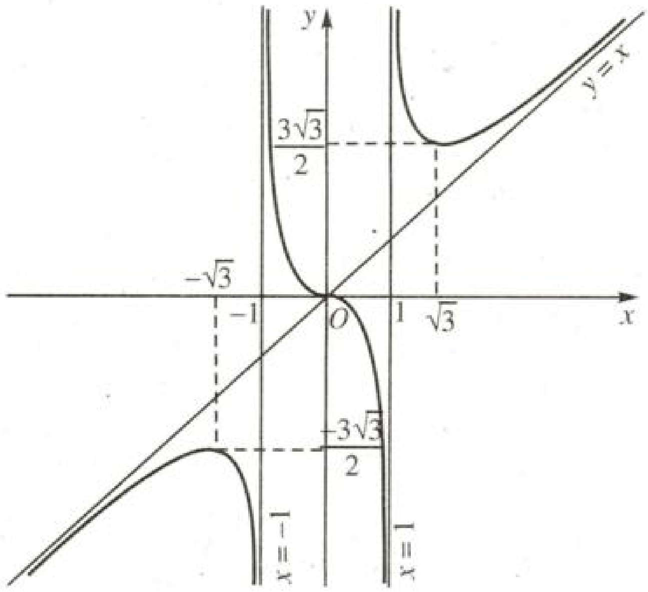
có tiệm cận xiên (khi $x \to +\infty$ và khi $x \to -\infty$) là đường thẳng $y = x$ vì

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$$

và $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$

(h.1.12).



Hình 1.12

H2 *Chứng minh rằng đường thẳng $y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số*

$$y = 2x + 1 + \frac{1}{x - 2}.$$

CHÚ Ý

Để xác định các hệ số a, b trong phương trình của đường tiệm cận xiên, ta có thể áp dụng các công thức sau :

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \ ; \qquad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$$

hoặc $$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \ ; \qquad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax].$$

(Khi $a = 0$ thì ta có tiệm cận ngang).

Thật vậy, xét trường hợp $x \to +\infty$, giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(\alpha\ ;+\infty)$ và đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (khi $x \to +\infty$). Khi đó, theo định nghĩa 3, ta có

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0. \qquad (1)$$

Do đó $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} = 0,$$

tức là $$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{b}{x} = 0$ nên

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}. \qquad (2)$$

Từ (1) suy ra

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]. \qquad (3)$$

Đảo lại, nếu a và b thoả mãn (2) và (3) thì từ (3) suy ra (1). Do đó đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $a \neq 0$ và là tiệm cận ngang nếu $a = 0$.

Trường hợp $x \to -\infty$ được chứng minh tương tự.

Ví dụ 4. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Giải. Ta có

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = 1 \ ;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0.$$

Theo chú ý vừa nêu, đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to +\infty$).

Ta cũng có $a = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $b = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$.

Do đó, đường thẳng $y = x$ cũng là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

Ta thấy lại kết quả đã nhận được trong ví dụ 3.

H3 *Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số*

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 2}.$$

Câu hỏi và bài tập

34. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau :

a) $y = \dfrac{x - 2}{3x + 2}$; b) $y = \dfrac{-2x - 2}{x + 3}$;

c) $y = x + 2 - \dfrac{1}{x - 3}$; d) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x + 1}$;

e) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$; f) $y = \dfrac{x}{x^3 + 1}$.

35. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau :

a) $y = \dfrac{2x - 1}{x^2} + x - 3$; b) $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^2 - 2x}$;

c) $y = \dfrac{x^3 + x + 1}{x^2 - 1}$; d) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{-5x^2 - 2x + 3}$.

36. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau :

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; b) $y = 2x + \sqrt{x^2 - 1}$;

c) $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$; d) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Luyện tập

37. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau :

a) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$; b) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$;

c) $y = \sqrt{x^2 + 4}$; d) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$.

38. a) Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 3}.$$

b) Xác định giao điểm I của hai tiệm cận trên và viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$.

c) Viết phương trình của đường cong $(\mathscr{C})$ đối với hệ toạ độ IXY.

Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathscr{C})$.

39. Cùng các câu hỏi như trong bài tập 38 đối với đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{x^2 + x - 4}{x + 2}$; b) $y = \dfrac{x^2 - 8x + 19}{x - 5}$.