

§ 4

SỐ e VÀ LÔGARIT TỰ NHIÊN

Cho đến bây giờ, dường như π là số vô tỉ quan trọng nhất mà ta biết đến. Trong bài này, ta sẽ được biết thêm một số vô tỉ cũng quan trọng không kém,

đó là số e . Số e là giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, xấp xỉ bằng $2,718281828\dots$; nó xuất hiện một cách tự nhiên trong Toán học, cũng như trong đời sống. Chính vì vậy lôgarit cơ số e còn được gọi là lôgarit tự nhiên. Trong các máy tính bỏ túi, người ta đều thiết kế các phím bấm cho phép tính giá trị của các biểu thức e^x và $\log_e x$ (còn kí hiệu là $\ln x$).

1. Lãi kép liên tục và số e

Ta đã biết : Nếu đem gửi ngân hàng một số vốn ban đầu là A với lãi suất mỗi năm là r theo thể thức lãi kép thì sau N năm gửi số tiền thu về cả vốn lẫn lãi sẽ là $A(1 + r)^N$.

Giả sử ta chia mỗi năm thành m kì để tính lãi và giữ nguyên lãi suất mỗi năm là r thì lãi suất mỗi kì là $\frac{r}{m}$ và số tiền thu được sau N năm (hay sau Nm kì) là $A \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{Nm}$.

H1 Cho $A = 100$ triệu đồng, $r = 8\%$ năm, $N = 2$. Dùng máy tính bỏ túi tính số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sau 2 năm theo các định kì sau đây :

$$m = 1 \text{ (định kì năm)} ; \quad m = 2 \text{ (định kì 6 tháng)} ;$$

$$m = 4 \text{ (định kì quý)} ; \quad m = 12 \text{ (định kì tháng)} ;$$

$$m = 52 \text{ (định kì tuần)} ; \quad m = 365 \text{ (định kì ngày)}.$$

Hiển nhiên khi tăng số kì m trong một năm thì số tiền thu được sau N năm (tức Nm kì) cũng tăng theo. Tuy nhiên như ta thấy sau đây, nó không thể tăng lên vô hạn được.

Thật vậy, xét giới hạn của dãy số sau (trong đó A, r, N là cố định)

$$S_m = A \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{Nm}.$$

Ta có

$$S_m = A \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{Nm} = A \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}} \right]^{Nr}. \quad (1)$$

Để xét giới hạn của dãy (1), cần xét giới hạn

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}.$$

Một cách tổng quát, ta xét giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Người ta chứng minh được giới hạn trên tồn tại, nó là một số vô tỉ có giá trị bằng $2,718281828\dots$ và được kí hiệu là e . Vậy

$$e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \approx 2,7183. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), người ta suy ra $\lim S_m = Ae^{Nr}$. □

- Thể thức tính lãi khi $m \rightarrow +\infty$ gọi là thể thức *lãi kép liên tục*.

Như vậy với số vốn ban đầu là A , theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất mỗi năm là r thì sau N năm số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sẽ là

$$S = Ae^{Nr}. \quad (3)$$

Công thức (3) được gọi là *công thức lãi kép liên tục*.

Ví dụ 1. Với số vốn 100 triệu đồng gửi vào ngân hàng theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất 8% năm thì sau 2 năm số tiền thu về cả vốn lẫn lãi sẽ là

$$100 \cdot e^{2 \cdot 0,08} \approx 117,351087 \quad (\text{triệu đồng}).$$

□

- Nhiều hiện tượng tăng trưởng (hoặc suy giảm) của tự nhiên và xã hội, chẳng hạn sự tăng dân số, cũng được ước tính theo công thức (3). Vì vậy công thức (3) còn được gọi là *công thức tăng trưởng mũ*.

Ví dụ 2. Sự tăng dân số được ước tính theo công thức (3), trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm (xem bài đọc thêm "Sự tăng trưởng (hay suy giảm) mũ" trang 110). Biết rằng tỉ lệ tăng dân số thế giới hàng năm là 1,32%, năm 1998 dân số thế giới vào khoảng 5926,5 triệu người. Khi đó dự đoán dân số thế giới năm 2008 (10 năm sau) sẽ là

$$5926,5 \cdot e^{10 \cdot 0,0132} \approx 6762,8 \quad (\text{triệu người}).$$

2. Lôgarit tự nhiên

DỊNH NGHĨA

Lôgarit cơ số e của một số dương a được gọi là *lôgarit tự nhiên* (hay lôgarit Nê-pe) của số a và kí hiệu là $\ln a$.

Lôgarit tự nhiên có đầy đủ các tính chất của lôgarit với cơ số lớn hơn 1.

H2 a) Dùng công thức đổi cơ số, hãy so sánh $\log x$ và $\ln x$ tùy theo các giá trị của x .

b) Tính giá trị của biểu thức $\log e^{2 \ln \sqrt{10}} - \ln 10^{\log e^{-3}}$

Ví dụ 3. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7% và sự tăng dân số được ước tính theo công thức (3).

Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 100 triệu người?

Giải. Theo bài ra, ta có

$$100 = 78,6858 \cdot e^{0,017N}. \quad (*)$$

Lấy lôgarit tự nhiên hai vế của (*) ta được

$$\ln 100 = \ln(78,6858 \cdot e^{0,017N}).$$

Từ đó suy ra

$$N = \frac{\ln 100 - \ln 78,6858}{0,017} \approx 14.$$

Vậy nếu cứ tăng dân số với tỉ lệ hàng năm là 1,7% thì đến năm 2015 dân số nước ta sẽ ở mức 100 triệu người.

Câu hỏi và bài tập

42. Tìm sai lầm trong lập luận sau :

Ta có $\ln e^2 = 2 \ln e = 2 \cdot 1 = 2$ và $\ln(2e) = \ln e + \ln e = 1 + 1 = 2$. Từ đó suy ra $e^2 = 2e$, mà $e \neq 0$ nên $e = 2$!

43. Biểu diễn các số sau đây theo $a = \ln 2$, $b = \ln 5$:

$$\ln 500; \ln \frac{16}{25}; \ln 6,25; \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100}.$$

44. Chứng minh

$$\frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4 \ln(\sqrt{2} + 1) - \frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1) = 0.$$

45. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi sau 10 giờ có bao nhiêu con vi khuẩn? Sau bao lâu số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng gấp đôi?

46. Cho biết chu kỳ bán huỷ của chất phóng xạ plutoni Pu^{239} là 24360 năm (tức là một lượng Pu^{239} sau 24360 năm phân huỷ thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân huỷ được tính theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân huỷ hàng năm ($r < 0$), t là thời gian phân huỷ, S là lượng còn lại sau thời gian phân huỷ t . Hỏi 10 gam Pu^{239} sau bao nhiêu năm phân huỷ sẽ còn 1 gam?

Bài đọc thêm

SỬ DỤNG MÁY TÍNH BỎ TÚI ĐỂ TÍNH LUỸ THỪA VÀ LÔGARIT

Có thể dùng máy tính bỏ túi, chẳng hạn máy tính CASIO *fx - 500 MS*, để tính luỹ thừa của 10, của e cũng như lôgarit thập phân và lôgarit tự nhiên của một số.

Ví dụ 1. Tính $\log 5,63$.

Để tính $\log 5,63$, ta ấn lần lượt các phím sau :

[log] [5] [.] [6] [3] [=].

Khi đó, trên màn hình hiện số

0.750508395.

Nếu làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư thì

$\log 5,63 \approx 0,7505$.

Ví dụ 2. Tính $10^{-2,13}$.

Để tính $10^{-2,13}$, ta ấn lần lượt các phím sau :

[SHIFT] [10^x] [(-) [2] [.] [1] [3] [=].

Khi đó, trên màn hình hiện số

0.007413102.

Nếu làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư thì

$10^{-2,13} \approx 0,0074$.

Ví dụ 3. Tính $\ln 4,83$.

Để tính $\ln 4,83$, ta ấn lần lượt các phím sau :

[ln] [4] [.] [8] [3] [=].

Trên màn hình hiện số

1.574846468.

Nếu làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư thì

$\ln 4,83 \approx 1,5748$.

Ví dụ 4. Tính $e^{\sqrt{5}}$.

Để tính $e^{\sqrt{5}}$, ta ấn lần lượt các phím sau :

[SHIFT] [e^x] [√] [5] [=].

Trên màn hình hiện số

9.356469017.

Nếu làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư thì

$$e^{\sqrt{5}} \approx 9,3565.$$



LÔGARIT TRONG MỘT SỐ CÔNG THỨC ĐO LƯỜNG

a) Độ pH trong hóa học

- Trong mỗi dung dịch, nồng độ ion hiđrô $[H_3O^+]$ đặc trưng cho tính axit, nồng độ hiđrôxyn $[OH^-]$ đặc trưng cho tính bazơ (kiềm), (nồng độ tính bằng mol/l).

Ở $25^\circ C$, tích $[H_3O^+] \times [OH^-]$ là một hằng số và bằng 10^{-14} (đối với mọi dung dịch).

Nước tinh khiết ở $25^\circ C$ có $[H_3O^+] = [OH^-] = 10^{-7}$. Nếu nồng độ $[H_3O^+]$ lớn hơn 10^{-7} thì dung dịch có tính axit, nồng độ $[H_3O^+]$ nhỏ hơn 10^{-7} thì dung dịch có tính kiềm.

Vì các nồng độ này là những số rất nhỏ nên để đặc trưng tính axít (tính bazơ) của một dung dịch, người ta xét chỉ số (hay độ) pH,

$$pH = -\log[H_3O^+].$$

(pH là chữ đầu của nhóm từ "potential of hydrogen" có nghĩa là tiềm lực của hiđrô).

Như vậy

$pH < 7$ nói lên rằng dung dịch có tính axit ;

$pH > 7$ nói lên rằng dung dịch có tính bazơ ;

$pH = 7$ chứng tỏ dung dịch là trung tính.

Ví dụ

Bia có $[H_3O^+] = 0,00008$, do đó có độ pH là

$$pH = -\log 0,00008 = 5 - \log 8 < 7.$$

Rượu có $[H_3O^+] = 0,0004$, do đó có độ pH là

$$pH = -\log 0,0004 = 4 - \log 4 < 7.$$

Như vậy, bia và rượu đều có tính axít, nhưng tính axít của rượu lớn hơn tính axít của bia.

- Trong thực tế, ngành thổ nhưỡng rất quan tâm đến độ pH của một vùng đất để tìm ra biện pháp cải tạo đất và chọn giống cây trồng thích hợp.

b) Độ chấn động trong địa vật lí

- Độ chấn động M của một địa chấn biên độ I được đo trong thang độ Richter (C. F. Richter, nhà địa vật lí Mĩ, 1900 – 1985) xác định bởi

$$M = \ln \frac{I}{I_0}$$

(I_0 là biên độ của dao động bé hơn $1\mu\text{m}$ trên máy đo địa chấn, đặt cách tâm địa chấn 100km , I_0 được lấy làm chuẩn).

- Ở 3 độ Richter, địa chấn chỉ có ảnh hưởng trong một vùng diện tích nhỏ ; ở 4 đến 5 độ Richter, địa chấn gây một số thiệt hại nhỏ ; ở 6 đến 8 độ Richter, địa chấn gây một số thiệt hại lớn ; ở 9 độ Richter, thiệt hại là cực kì lớn.

- Năng lượng giải tỏa E tại tâm địa chấn ở M độ Richter được xác định xấp xỉ bởi công thức

$$\log E \approx 11,4 + 1,5M.$$

Từ đó, chẳng hạn, ở 8 độ Richter, địa chấn có năng lượng giải tỏa gấp khoảng 30000 lần địa chấn ở 5 độ Richter (địa chấn ở 5 độ Richter có năng lượng giải tỏa khoảng $2 \cdot 10^{18} \text{ jun}$).

c) Độ to nhỏ của âm

Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm *mức cường độ của âm*. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ của âm là decibens (viết tắt là dB) (G. Bell, 1847 – 1922, nhà vật lí Mĩ gốc Anh).

Mức cường độ L của âm được tính theo công thức :

$$L(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

trong đó I là cường độ của âm, tức là năng lượng truyền đi bởi sóng âm trong một đơn vị thời gian và qua một đơn vị diện tích bề mặt vuông góc với phương sóng truyền (đơn vị đo là W/m^2) ; I_0 là cường độ của âm ở ngưỡng nghe ($I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$). Công thức trên cho thấy : Khi cường độ của âm tăng lên $10^2, 10^3, \dots$ lần thì cảm giác về độ to nhỏ của âm tăng lên gấp 2, 3, ... lần.

Chú ý rằng nếu thường xuyên nghe tiếng ồn khoảng 90dB thì có nguy cơ bị giảm thính lực, thậm chí bị điếc (xem bài tập 52 tr. 112).