

§ 3

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Nhiều bài toán dẫn đến việc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp số thực cho trước. Trong bài này ta sẽ ứng dụng tính đơn điệu và cực trị của hàm số để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

ĐỊNH NGHĨA

Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp \mathcal{D} ($\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$).

a) Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ với mọi } x \in \mathcal{D}$$

thì số $M = f(x_0)$ được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số f trên \mathcal{D} , kí hiệu là $M = \max_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.

b) Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ với mọi } x \in \mathcal{D}$$

thì số $m = f(x_0)$ được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số f trên \mathcal{D} , kí hiệu là $m = \min_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.

Như vậy, muốn chứng tỏ rằng số M (hoặc m) là giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên tập hợp \mathcal{D} cần chỉ rõ :

a) $f(x) \leq M$ (hoặc $f(x) \geq m$) với mọi $x \in \mathcal{D}$.

b) Tồn tại ít nhất một điểm $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho $f(x_0) = M$ (hoặc $f(x_0) = m$).

Ta quy ước rằng khi nói giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của hàm số f (mà không nói "trên tập \mathcal{D} ") thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của f trên tập xác định của nó.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$

Giải

Tập xác định của hàm số là $[-2; 2]$. Hiển nhiên $0 \leq f(x) \leq 2$ với mọi $x \in [-2; 2]$;

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \text{ và } f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 0.$$

Do đó

$$\min_{x \in [-2; 2]} \sqrt{4 - x^2} = 0 ; \quad \max_{x \in [-2; 2]} \sqrt{4 - x^2} = 2. \quad \square$$

Phương pháp thường được sử dụng để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp là lập bảng biến thiên của hàm số trên tập hợp đó.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = x^3 - 3x + 3 \text{ trên đoạn } \left[-3; \frac{3}{2}\right].$$

Giải. Ta có

$$f'(x) = 3(x^2 - 1);$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Sau đây là bảng biến thiên của f trên đoạn $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$:

x	-3	-1	1	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	-15	5	1	$\frac{15}{8}$

Từ bảng biến thiên, ta được

$$\max_{x \in \left[-3; \frac{3}{2}\right]} f(x) = f(-1) = 5; \quad \min_{x \in \left[-3; \frac{3}{2}\right]} f(x) = f(-3) = -15.$$

[H] Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = x + \frac{1}{x-1} \text{ trên khoảng } (1; +\infty).$$

Ví dụ 3. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo mẫu hình 1.4. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), chiều cao là h (cm) và có thể tích là 500 cm^3 .

- Hãy biểu diễn h theo x .
- Tìm diện tích $S(x)$ của mảnh các tông theo x .
- Tìm giá trị của x sao cho $S(x)$ nhỏ nhất.

Giải

- Thể tích của hộp là

$$V = x^2 h = 500 \text{ (cm}^3\text{)}. \text{ Do đó } h = \frac{500}{x^2}, \quad x > 0.$$

- Diện tích của mảnh các tông dùng làm hộp là

$$S(x) = x^2 + 4hx.$$

Từ a) ta có

$$S(x) = x^2 + \frac{2000}{x}, \quad x > 0.$$

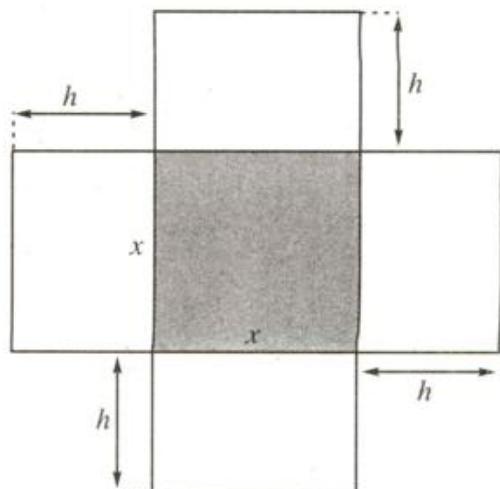
- Ta tìm $x > 0$ sao cho tại đó $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$. Ta có

$$S'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1000)}{x^2};$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10.$$

Bảng biến thiên của S trên khoảng $(0; +\infty)$:

x	0	10	$+\infty$
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$		300	



Hình 1.4

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0 ; +\infty)$, hàm số S đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = 10$. Vậy muốn tốn ít nguyên liệu nhất, ta lấy độ dài cạnh đáy hình hộp là $x = 10$ (cm). \square

Nhận xét

Người ta đã chứng minh được rằng hàm số liên tục trên một đoạn thì đạt được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn đó.

Trong nhiều trường hợp, có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn mà không cần lập bảng biến thiên của nó.

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a ; b)$, có thể trừ một số hữu hạn điểm. Nếu $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc $(a ; b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a ; b]$ như sau :

QUY TẮC

1. Tìm các điểm x_1, x_2, \dots, x_m thuộc $(a ; b)$ tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.
2. Tính $f(x_1); f(x_2), \dots, f(x_m), f(a)$ và $f(b)$.
3. So sánh các giá trị tìm được.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của f trên đoạn $[a ; b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của f trên đoạn $[a ; b]$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 3$ trên đoạn $[0 ; 2]$.

Giải. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$;

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 ;$$

$$f(1) = 1; f(0) = 3; f(2) = 5.$$

Do đó $\max_{x \in [0;2]} f(x) = 5$ và $\min_{x \in [0;2]} f(x) = 1$.

Câu hỏi và bài tập

16. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

17. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $f(x) = x^2 + 2x - 5$ trên đoạn $[-2; 3]$;

b) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[-4; 0]$;

c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$;

d) $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ trên đoạn $[2; 4]$;

e) $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$ trên đoạn $[0; 1]$;

f) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $(0; 2]$.

18. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$; b) $y = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$.

19. Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên cạnh BC , hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

20. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng : Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng

$$P(n) = 480 - 20n \text{ (gam)}.$$

Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất ?

Luyện tập

21. Tìm cực trị của các hàm số sau :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}; & \text{b)} f(x) = \frac{x^3}{x + 1}; \\ \text{c)} f(x) = \sqrt{5 - x^2}; & \text{d)} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}. \end{array}$$

22. Tìm giá trị của m để hàm số

$$f(x) = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$$

có cực đại và cực tiểu.

23. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức

$$G(x) = 0,025x^2(30 - x),$$

trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất và tính độ giảm đó.

24. Cho parabol (P) : $y = x^2$ và điểm $A(-3; 0)$. Xác định điểm M thuộc parabol (P) sao cho khoảng cách AM là ngắn nhất và tìm khoảng cách ngắn nhất đó.

25. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 300km. Vận tốc dòng nước là 6km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức

$$E(v) = cv^3t,$$

trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

26. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là

$$f(t) = 45t^2 - t^3, \quad t = 0, 1, 2, \dots, 25.$$

Nếu coi f là hàm số xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t .

- a) Tính tốc độ truyền bệnh vào ngày thứ 5.
- b) Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất và tính tốc độ đó.
- c) Xác định các ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 600.
- d) Xét chiều biến thiên của hàm số f trên đoạn $[0 ; 25]$.

27. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$ trên đoạn $[-3; 1]$;

b) $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$;

c) $f(x) = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$;

d) $f(x) = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

28. Trong các hình chữ nhật có chu vi là 40 cm, hãy xác định hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.