§ 6 HÀM SỐ LUỸ THỪA

Chúng ta đã học các hàm số : $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Đó là những trường hợp riêng của *hàm số luỹ thừa*.

1. Khái niệm hàm số luỹ thừa

Hàm số luỹ thừa là hàm số có dạng $y = x^{\alpha}$, trong đó α là một hằng số tuỳ ý.

Từ các định nghĩa về luỹ thừa, ta thấy

– Hàm số $y = x^n$, với n nguyên dương, xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

– Hàm số $y = x^n$, với n nguyên âm hoặc $n = 0$, xác định với mọi $x \neq 0$.

– Hàm số $y = x^{\alpha}$, với α không nguyên, có tập xác định là tập các số thực dương.

Người ta chứng minh được rằng hàm số luỹ thừa liên tục trên tập xác định của nó.

CHÚ Ý

Theo định nghĩa, đẳng thức $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ chỉ xảy ra nếu $x > 0$. Do đó, hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Chẳng hạn, hàm số

$y = \sqrt[3]{x}$ là hàm số căn bậc ba, xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$; còn hàm số luỹ thừa $y = x^{\frac{1}{3}}$ chỉ xác định với mọi $x > 0$.

2. Đạo hàm của hàm số luỹ thừa

Với n là số nguyên lớn hơn 1, ta đã có công thức $(x^n)' = nx^{n-1}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Tương tự, ta có công thức đạo hàm của hàm số luỹ thừa với số mũ thực sau đây.

ĐỊNH LÍ

a) Hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ (với $\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

b) Nếu hàm số $u = u(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm trên J thì hàm số $y = u^{\alpha}(x)$ cũng có đạo hàm trên J và

$$\left(u^{\alpha}(x)\right)' = \alpha u^{\alpha-1}(x)u'(x).$$

Chứng minh

a) Với mọi $x > 0$, ta có

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \left(e^{\ln x^{\alpha}}\right)' = e^{\ln x^{\alpha}}\left(\ln x^{\alpha}\right)' = x^{\alpha}(\alpha \ln x)' = \alpha x^{\alpha}.\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

b) Kết luận này suy ra từ a) và quy tắc đạo hàm của hàm số hợp. □

Ví dụ 1

a) $(x^{\pi}.\pi^{x})' = (x^{\pi})'.\pi^{x} + x^{\pi}.(\pi^{x})'$

$= \pi.x^{\pi-1}.\pi^{x} + x^{\pi}.\pi^{x}.\ln\pi = x^{\pi-1}\pi^{x}(\pi + x\ln\pi).$

b) $\left[(\ln x)^{1+\sqrt{2}}\right]' = (1+\sqrt{2})\,(\ln x)^{\sqrt{2}}(\ln x)' = (1+\sqrt{2})\,(\ln x)^{\sqrt{2}}.\dfrac{1}{x}$.

H1 *Chứng minh rằng với n nguyên và $n \le 1$ ta có $(x^n)' = nx^{n-1}$ với mọi $x \ne 0$.*

CHÚ Ý

a) Áp dụng định lí trên, ta dễ dàng chứng minh công thức đạo hàm của hàm số căn bậc n sau đây :

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

(với mọi $x > 0$ nếu n chẵn, với mọi $x \ne 0$ nếu n lẻ).

b) Nếu $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm trên J và thoả mãn điều kiện $u(x) > 0$ với mọi $x \in J$ khi n chẵn, $u(x) \ne 0$ với mọi $x \in J$ khi n lẻ thì

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u^{n-1}(x)}} \text{ (với mọi } x \in J).$$

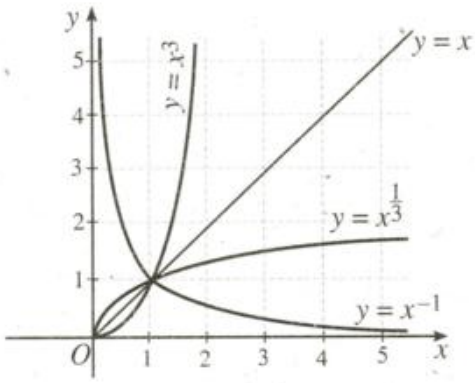
Ví dụ 2. $(\sqrt[3]{\sin 3x})' = \dfrac{(\sin 3x)'}{3\sqrt[3]{(\sin 3x)^2}} = \dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{\sin^2 3x}}$.

H2 *Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[4]{e^{2x}+1}$.*

3. Vài nét về sự biến thiên và đồ thị của hàm số luỹ thừa

Ở đây, ta chỉ xét các hàm số luỹ thừa dạng $y = x^{\alpha}$ với $\alpha \ne 0$ và với tập xác định là $(0\,;+\infty)$.

Từ công thức $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$, ta suy ra hàm số $y = x^{\alpha}$ đồng biến trên khoảng $(0\,;+\infty)$ nếu $\alpha > 0$ và nghịch biến trên khoảng $(0\,;+\infty)$ nếu $\alpha < 0$. Hình 2.9 thể hiện đồ thị của một số hàm số luỹ thừa trên khoảng $(0\,;+\infty)$.

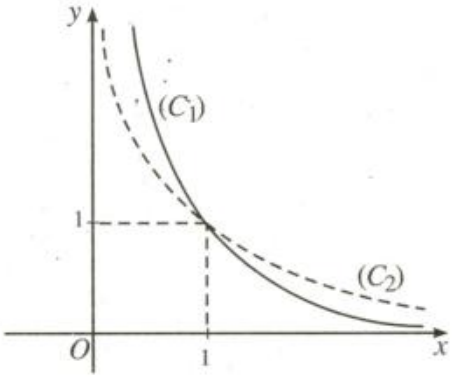


Hình 2.9

Nhận xét. Do $1^{\alpha} = 1$ với mọi α nên đồ thị của mọi hàm số luỹ thừa đều đi qua điểm (1 ; 1).

Câu hỏi và bài tập

57. Trên hình 2.10 cho hai đường cong (C_1) (đường nét liền) và (C_2) (đường nét đứt) được vẽ trên cùng một mặt phẳng toạ độ. Biết rằng mỗi đường cong ấy là đồ thị của một trong hai hàm số luỹ thừa $y = x^{-2}$ và $y = x^{-\frac{1}{2}}$ $(x > 0)$. Chỉ dựa vào tính chất của luỹ thừa, có thể nhận biết đường cong nào là đồ thị của hàm số nào được không ? Hãy nêu rõ lập luận.



Hình 2.10

58. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = (2x + 1)^{\pi}$;

b) $y = \sqrt[5]{\ln^3 5x}$;

c) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1 + x^3}{1 - x^3}}$;

d) $y = \left(\dfrac{x}{b}\right)^a \left(\dfrac{a}{x}\right)^b$ với $a > 0,\ b > 0$.

Luyện tập

59. Tính giá trị gần đúng đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm đã cho (chính xác đến hàng phần trăm) :

a) $y = \log_3(\sin x)$ tại $x = \dfrac{\pi}{4}$;

b) $y = \dfrac{2^x}{x^2}$ tại $x = 1$.

60. a) Chứng minh rằng đồ thị của hai hàm số $y = a^x$ và $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ đối xứng với nhau qua trục tung (h.2.2 với a = 2).

b) Chứng minh rằng đồ thị của hai hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ đối xứng với nhau qua trục hoành (h.2.4 với $a = 2$).

61. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \log_{0,5} x$. Dựa vào đồ thị, hãy giải các bất phương trình sau :

a) $\log_{0,5} x > 0$;

b) $-3 \leq \log_{0,5} x < -1$.

62. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$. Dựa vào đồ thị, hãy giải các bất phương trình sau :

a) $\left(\sqrt{3}\right)^x \leq 1$;

b) $\left(\sqrt{3}\right)^x > 3$.