§ 5 HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Trong bài này, ta luôn giả thiết a là một số dương và khác 1 ($0 < a \neq 1$) đã cho, J là một khoảng hay hợp của nhiều khoảng nào đó.

1. Khái niệm hàm số mũ và hàm số lôgarit

Từ định nghĩa luỹ thừa và lôgarit, ta thấy :

- Với mỗi giá trị thực của x, ta luôn xác định được một giá trị a^x (duy nhất).
- Với mỗi giá trị thực dương của x, ta luôn xác định được một giá trị $\log_a x$ (duy nhất).

Từ đó, ta có hàm số $y = a^x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = \log_a x$ xác định trên $\mathbb{R}_+^* = (0 ; +\infty)$.

ĐỊNH NGHĨA

> Giả sử a là một số dương và khác 1.
> Hàm số dạng $y = a^x$ được gọi là *hàm số mũ cơ số a*.
> Hàm số dạng $y = \log_a x$ được gọi là *hàm số lôgarit cơ số a*.

Khi không cần nhấn mạnh cơ số, hàm số mũ cơ số a còn gọi tắt là *hàm số mũ*[1] ; hàm số lôgarit cơ số a còn gọi tắt là *hàm số lôgarit*.

Ta cũng dùng kí hiệu $y = \log x$ (hoặc $\lg x$) để chỉ hàm số lôgarit cơ số 10 và kí hiệu $y = \ln x$ để chỉ hàm số lôgarit cơ số e. Trong nhiều tài liệu, hàm số $y = e^x$ còn được kí hiệu là $y = \exp(x)$.

2. Một số giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit

a) Ta thừa nhận rằng các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ liên tục tại mọi điểm mà nó xác định, tức là

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0},$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0 .$$

(1) Có tài liệu coi hàm số mũ là hàm số có dạng $y = ka^x$, trong đó k là hằng số khác 0.

H1 *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$; *b)* $\lim\limits_{x \to 8} \log_2 x$; *c)* $\lim\limits_{x \to 0} \log\left|\frac{\sin x}{x}\right|$.

b) Ta đã biết $\lim\limits_{t \to +\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$. Ngoài ra ta còn có $\lim\limits_{t \to -\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$. Từ đó, bằng cách đổi biến (đặt $\frac{1}{t} = x$) ta được

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \qquad (1)$$

Sử dụng (1), ta dễ dàng chứng minh được hai giới hạn quan trọng sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

$$\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad (2)$$

$$\lim_{x \to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1. \qquad (3)$$

Chứng minh. Ta có.

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Khi x dần đến 0 thì $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$ nên do tính liên tục của hàm số lôgarit, ta có

$$\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

Vậy (2) được chứng minh.

Để chứng minh (3), ta đặt $t = e^x - 1$. Khi đó ta có $x = \ln(1+t)$, và $x \to 0$ khi và chỉ khi $t \to 0$. Do đó

$$\lim_{x \to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0}\frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t \to 0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)^{-1} = 1.$$

Vậy (3) được chứng minh. □

3. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit

Dưới đây, chúng ta sẽ chứng tỏ rằng hàm số mũ và hàm số lôgarit có đạo hàm tại mọi điểm mà nó xác định.

a) Đạo hàm của hàm số mũ

ĐỊNH LÍ 2

> a) Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ và
>
> $$\left(a^x\right)' = a^x \ln a \text{ ; nói riêng ta có } \left(e^x\right)' = e^x.$$
>
> b) Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J thì hàm số $y = a^{u(x)}$ có đạo hàm trên J và
>
> $$\left(a^{u(x)}\right)' = u'(x)a^{u(x)} \ln a \text{ ; nói riêng ta có } \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}.$$

Chứng minh

a) Trước hết ta xét hàm số $y = e^x$. Giả sử x là một số tuỳ ý. Kí hiệu Δx là số gia của biến số tại x và Δy là số gia của hàm số tương ứng với nó, ta có

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right).$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \quad \text{(theo (3))}.$$

Vậy $\left(e^x\right)' = e^x$ với mọi x.

Đối với hàm số $y = a^x$, ta có $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$ nên theo công thức đạo hàm của hàm số hợp, ta có

$$\left(a^x\right)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = a^x \ln a \quad (\text{với mọi } x \in \mathbb{R}).$$

b) Kết luận này suy ra từ phần a) của định lí và công thức đạo hàm của hàm số hợp. □

Ví dụ 1. Với $y = (x^2 + 1)e^x$, ta có

$$y' = (x^2 + 1)' e^x + (x^2 + 1)(e^x)' = (2x + x^2 + 1) e^x = (x + 1)^2 e^x.$$

H2 *Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau :*

a) $y = (x+1)e^{2x}$; *b)* $y = e^{\sqrt{x}}\sin x$.

b) Đạo hàm của hàm số lôgarit

ĐỊNH LÍ 3

a) Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}\ ;\ \text{nói riêng ta có } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

b) Nếu hàm số $u = u(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm trên J thì hàm số $y = \log_a u(x)$ có đạo hàm trên J và

$$\left(\log_a u(x)\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)\ln a}\ ;\ \text{nói riêng ta có } (\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Chứng minh

a) Trước hết ta xét hàm số $y = \ln x$. Giả sử x là một số dương tuỳ ý. Kí hiệu Δx là số gia của biến số tại x và Δy là số gia của hàm số tương ứng với nó, ta có

$$\Delta y = \ln(x+\Delta x) - \ln x = \ln\frac{x+\Delta x}{x} = \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\,\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \quad \text{(theo (2)).}$$

Vậy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ với mọi $x > 0$.

Đối với hàm số $y = \log_a x$, ta có

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x\ln a} \text{ (với mọi } x > 0).$$

b) Kết luận này suy ra từ phần a) của định lí và công thức đạo hàm của hàm số hợp □

Ví dụ 2. Đối với hàm số $y = \ln(x^2 - x + 1)$, ta có

$$y' = \frac{(x^2 - x + 1)'}{x^2 - x + 1} = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}.$$

$\boxed{\text{H3}}$ *Chứng minh rằng* $[\ln(-x)]' = \dfrac{1}{x}$ *với mọi* $x < 0$.

HỆ QUẢ

a) $\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$ với mọi $x \neq 0$.

b) Nếu hàm số $u = u(x)$ nhận giá trị khác 0 và có đạo hàm trên J thì

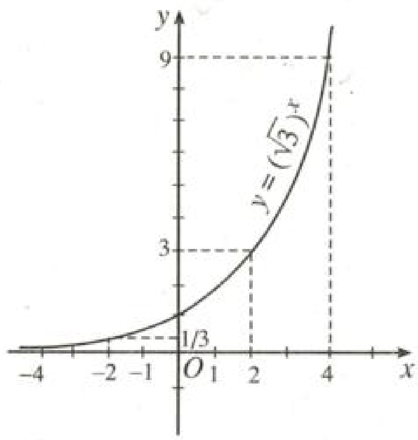
$$\left(\ln|u(x)|\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ với mọi } x \in J.$$

Hệ quả này được suy ra từ định lí 3 và kết quả của $\boxed{\text{H3}}$.

4. Sự biến thiên và đồ thị của hàm số mũ và hàm số lôgarit

a) Hàm số $y = a^x$

Ta đã biết hàm số $y = a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Để khảo sát sự biến thiên của nó, ta cần xét dấu của đạo hàm $y' = a^x \ln a$. Do $a^x > 0$ với mọi x nên dấu của y' trùng với dấu của $\ln a$. Mặt khác, theo tính chất của lôgarit ta có $\ln a > 0$ khi $a > 1$ và $\ln a < 0$ khi $0 < a < 1$. Bởi vậy, ta xét hai trường hợp :



Hình 2.1

• *Trường hợp* $a > 1$

Trong trường hợp này ta có $\ln a > 0$ nên $y' > 0$ với mọi x. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Người ta còn chứng minh được rằng $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ và

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0. \qquad (4)$$

Giới hạn (4) chứng tỏ đồ thị của hàm số $y = a^x$ có tiệm cận ngang (khi $x \to -\infty$) là trục hoành.

Ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = a^x$ $(a > 1)$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

Hàm số $y = a^x$ nhận mọi giá trị thuộc khoảng $(0 ; +\infty)$.

Hình 2.1 thể hiện đồ thị của hàm số $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$. Đồ thị của các hàm số mũ với cơ số $a > 1$ cũng có dạng tương tự. Chúng có chung các đặc điểm đáng chú ý sau đây :

(i) Luôn cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 (vì ta luôn có $a^0 = 1$) ;

(ii) Nằm hoàn toàn ở phía trên của trục hoành (vì $a^x > 0$ với mọi x).

• *Trường hợp* $0 < a < 1$

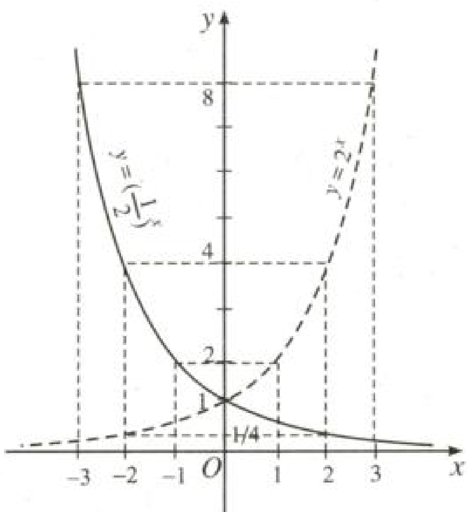
Trong trường hợp này, người ta cũng chứng minh được rằng $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ và

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0. \qquad (5)$$

H4 *a) Dựa vào (5), hãy nêu kết luận về đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = a^x$.*

b) Lập bảng biến thiên của hàm số $y = a^x$ với $0 < a < 1$.

Trên hình 2.2, đường nét liền thể hiện đồ thị của hàm số $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. Dễ thấy đồ thị này cũng có các đặc điểm (i) và (ii) như trong trường hợp $a > 1$.



Hình 2.2

GHI NHỚ

Hàm số $y = a^x$

* Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là khoảng $(0 ; +\infty)$;

* Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$;

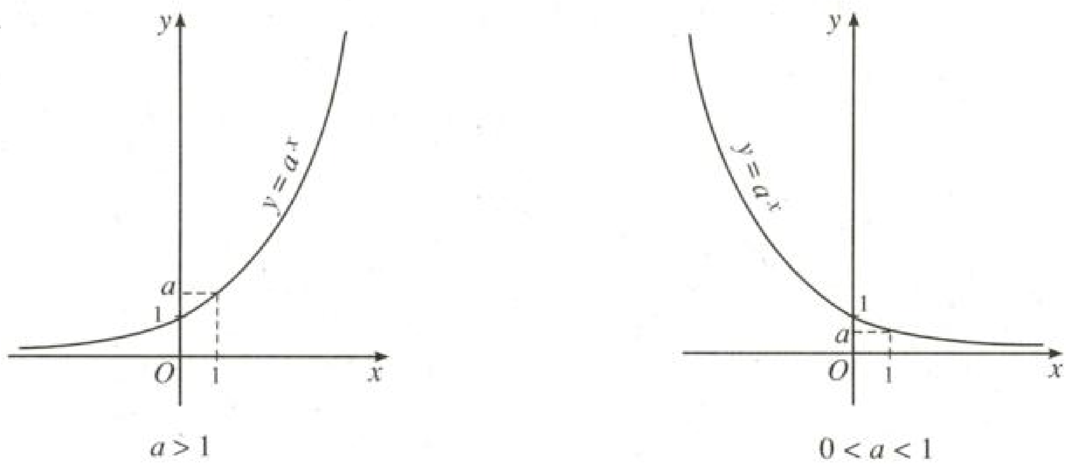
* Có đồ thị :

  – Đi qua điểm $(0 ; 1)$,

  – Nằm ở phía trên trục hoành,

  – Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.

Đồ thị có một trong hai dạng nêu ở hình 2.3.



Hình 2.3

b) Hàm số $y = \log_a x$

Ta đã biết hàm số $y = \log_a x$ có tập xác định là khoảng $(0 ; +\infty)$ và trên khoảng đó nó có đạo hàm là $y' = (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

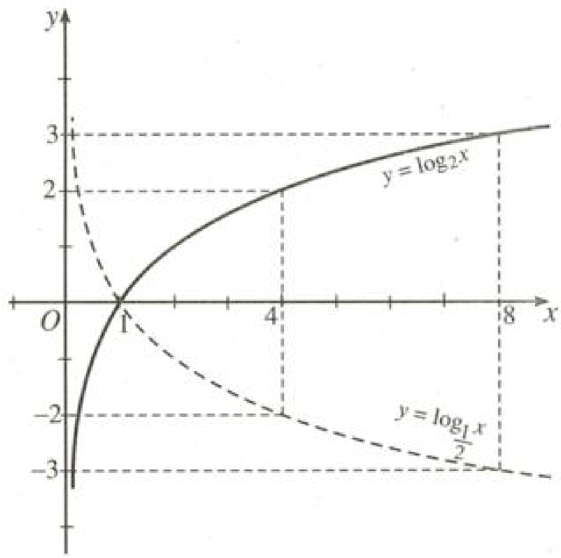
Tương tự hàm số mũ, để xét dấu của đạo hàm, ta xét hai trường hợp : $a > 1$ và $0 < a < 1$.

Một số kết quả khảo sát hàm số $y = \log_a x$ được ghi lại trong bảng sau :

Hàm số $y = \log_a x$ với $a > 1$	Hàm số $y = \log_a x$ với $0 < a < 1$
• $y' > 0$ với mọi $x \in (0 ; +\infty)$ • Hàm số đồng biến trên $(0 ; +\infty)$ và nhận mọi giá trị thuộc $\mathbb{R}$ • $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ (6) • $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$	• $y' < 0$ với mọi $x \in (0 ; +\infty)$ • Hàm số nghịch biến trên $(0 ; +\infty)$ và nhận mọi giá trị thuộc $\mathbb{R}$ • $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$ (7) • $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$

Các giới hạn (6) và (7) chứng tỏ rằng trong cả hai trường hợp, đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ đều có tiệm cận đứng (khi $x \to 0^+$) là trục tung.

Trên hình 2.4, đường nét liền thể hiện đồ thị của hàm số $y = \log_2 x$ (các hàm số lôgarit cơ số a với $a > 1$ có dạng tương tự), đường nét đứt thể hiện đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (các hàm số lôgarit cơ số a với $0 < a < 1$ có dạng tương tự). Chúng có chung những đặc điểm đáng chú ý sau :



Hình 2.4

(i) Luôn cắt trục hoành tại điểm $(1 ; 0)$ (vì $\log_a 1 = 0$ với mọi a) ;

(ii) Nằm hoàn toàn về bên phải trục tung (vì $\log_a x$ chỉ xác định khi $x > 0$).

H5 *Dựa vào bảng trên, hãy lập bảng biến thiên của hàm số $y = \log_a x$ trong mỗi trường hợp $a > 1$ và $0 < a < 1$. Kiểm nghiệm các tính chất được nêu trong bảng đó qua đồ thị hình 2.5.*

GHI NHỚ

Hàm số $y = \log_a x$

* Có tập xác định là khoảng $(0 ; +\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;

* Đồng biến trên $(0 ; +\infty)$ khi $a > 1$, nghịch biến trên $(0 ; +\infty)$ khi $0 < a < 1$;

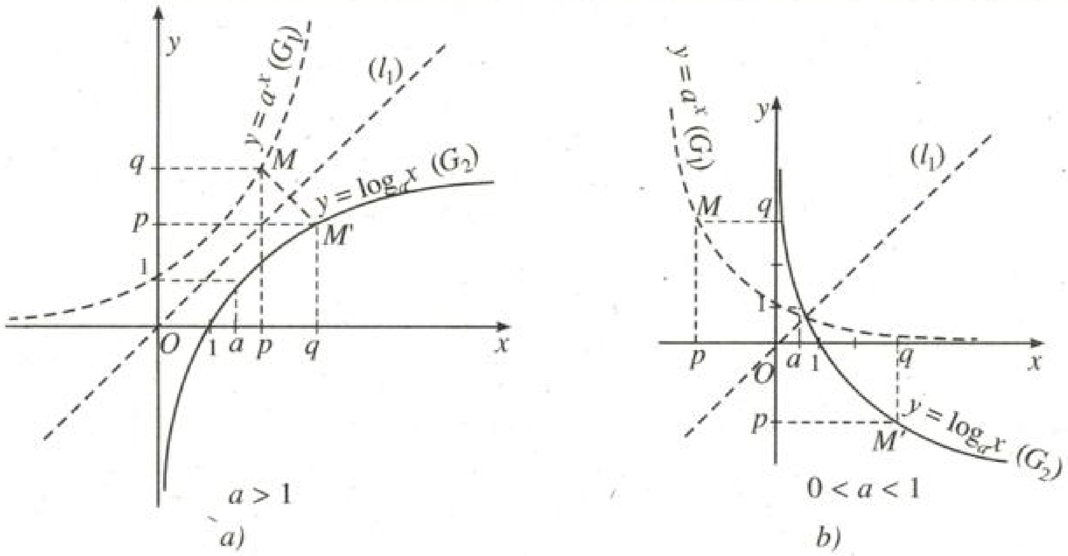
* Có đồ thị

  – Đi qua điểm $(1 ; 0)$,

  – Nằm ở bên phải trục tung,

  – Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

Đồ thị có một trong hai dạng nêu ở hình 2.5 (đường liền nét).



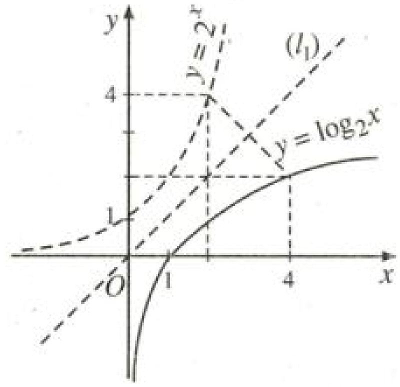
Hình 2.5

Nhận xét

Nếu gọi (G_1) là đồ thị của hàm số $y = a^x$ và (G_2) là đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ thì (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua đường phân giác (l_1) của góc phần tư thứ nhất.

Thật vậy, xét điểm $M(p ; q)$ bất kì, điểm đối xứng với M qua (l_1) là điểm $M'(q ; p)$, ta có (h.2.5) :

$$M(p ; q) \in (G_1) \Leftrightarrow q = a^p \Leftrightarrow p = \log_a q$$
$$\Leftrightarrow M'(q ; p) \in (G_2).$$



Hình 2.6

Điều đó đã chứng minh nhận xét trên. Ta cũng có thể kiểm nghiệm lại nhận xét này đối với hai hàm số $y = \log_2 x$ và $y = 2^x$ (h. 2.6) bằng cách gấp tờ giấy theo đường (l_1).

Bài đọc thêm

SỰ TĂNG TRƯỞNG (HAY SUY GIẢM) MŨ

1. Thế nào là tăng trưởng (hay suy giảm) mũ ?

Trong bài học §4, ta đã làm quen với vấn đề lãi kép liên tục. Trong thực tế, nhiều hiện tượng tự nhiên, xã hội có tính chất tăng trưởng (hay suy giảm) tương tự như vấn đề lãi kép liên tục, chẳng hạn: vấn đề tăng trưởng dân số, vấn đề sinh sôi của vi trùng, vấn đề phân huỷ của các chất phóng xạ,... Các vấn đề trên được gọi là vấn đề *tăng trưởng (hay suy giảm) mũ*.

Về thực chất, sự tăng trưởng (hay suy giảm) mũ được đặc trưng bởi một hàm số mà đạo hàm của nó tại mỗi điểm đều tỉ lệ với giá trị của hàm số tại điểm đó với hệ số tỉ lệ không đổi, tức là hàm số $y = f(x)$ thoả mãn điều kiện

$$f'(x) = kf(x) \qquad (1)$$

(xét trên một khoảng nào đó) trong đó k là một hằng số khác 0 nào đó. Số k được gọi là *tỉ lệ tăng trưởng* khi $k > 0$ và được *gọi là tỉ lệ suy giảm* khi $k < 0$.

Ta sẽ chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x)$ thoả mãn điều kiện (1) khi và chỉ khi nó có dạng

$$y = Ce^{kx} \text{ (với } C \text{ là hằng số tuỳ ý).} \qquad (2)$$

Thật vậy, dễ thấy hàm số $y = Ce^{kx}$ (C là hằng số) luôn thoả mãn điều kiện (1).

Ngược lại, giả sử $y = f(x)$ là hàm số thoả mãn điều kiện (1).

Khi đó, nếu đặt $C(x) = \dfrac{f(x)}{e^{kx}}$, tức là $f(x) = C(x)e^{kx}$ thì theo (1) ta có :

$$f'(x) = C'(x)e^{kx} + C(x)ke^{kx} = C'(x)e^{kx} + kf(x) = kf(x).$$

Từ đó suy ra $C'(x)e^{kx} = 0$. Tức là $C'(x) = 0$ (với mọi x thuộc khoảng đang xét). Vậy $C(x)$ phải là một hằng số C nào đó và do đó $f(x) = Ce^{kx}$. □

Dễ thấy C là giá trị của hàm số f tại $x = 0$ nên C còn được gọi là giá trị ban đầu. Trong công thức lãi kép liên tục thì giá trị ban đầu chính là số vốn ban đầu gửi vào ngân hàng $(C = A)$, k là lãi suất mỗi năm $(k = r)$ và x là số năm gửi $(x = N)$.

2. Chu kì bán huỷ (bán rã) của chất phóng xạ

Trong công thức (2), nếu $k < 0$ thì hàm số $y = Ce^{kx}$ mô tả sự suy giảm mũ. Một ví dụ điển hình cho sự suy giảm mũ là sự phân huỷ của các chất phóng xạ.

Giả sử có một lượng chất phóng xạ ban đầu là u_0, lượng chất phóng xạ còn lại tại thời điểm t là

$$u(t) = u_0 e^{kt}$$

trong đó $k < 0$ là hệ số suy giảm (trong Vật lí, số $|k|$ gọi là hằng số phóng xạ)

Ta đặt $u_1 = u(t_1)$ và $u_2 = u(t_2)$ và xét tỉ số

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_0 e^{kt_2}}{u_0 e^{kt_1}} = e^{k(t_2 - t_1)}.$$

Kết quả đó chứng tỏ rằng tỉ số giữa hai lượng phóng xạ còn lại tại hai thời điểm t_2 và t_1 chỉ phụ thuộc vào hiệu số $t_2 - t_1$ mà thôi. Điều đó cho phép người ta đưa ra một khái niệm gọi là *chu kì bán huỷ* (*bán rã*) của chất phóng xạ, đó là khoảng thời gian mà lượng chất phóng xạ đó phân huỷ đi chỉ còn lại một nửa. Nói cách khác, chu kì bán huỷ là khoảng thời gian $s = t_2 - t_1$ sao cho

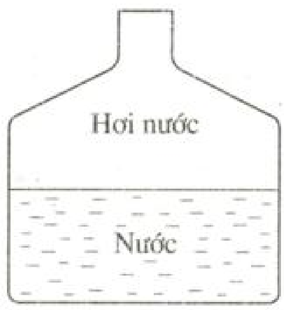
$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2} = e^{ks}. \quad (3)$$

Từ (3) ta có $s = \frac{-\ln 2}{k}$ hay $k = \frac{-\ln 2}{s}$. Như vậy, nếu biết chu kì bán huỷ của một chất phóng xạ thì ta cũng tính được hệ số suy giảm của chất phóng xạ đó. Chẳng hạn, chu kì bán huỷ của radium là 1550 năm nên hệ số suy giảm của radium là $k = \frac{-\ln 2}{1550} \approx -0{,}000447.$

Câu hỏi và bài tập

47. Khoảng 200 năm trước, hai nhà khoa học Pháp là Clô-zi-ut (R. Clausius) và Cla-pay-rông (E. Clapeyron) đã thấy rằng áp suất p của hơi nước (tính bằng milimét thuỷ ngân, viết tắt là mmHg) gây ra khi nó chiếm khoảng trống phía trên của mặt nước chứa trong một bình kín (h.2.7) được tính theo công thức

$$p = a \cdot 10^{\frac{k}{t+273}},$$



Hình 2.7

trong đó t là nhiệt độ C của nước, a và k là những hằng số. Cho biết $k \approx -2258,624$.

a) Tính a biết rằng khi nhiệt độ của nước là $100^{\circ}C$ thì áp suất của hơi nước là 760 mmHg (tính chính xác đến hàng phần chục).

b) Tính áp suất của hơi nước khi nhiệt độ của nước là $40^{\circ}C$ (tính chính xác đến hàng phần chục).

48. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^2 - e^{3x+2}}{x}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{5x}}{x}$.

49. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = (x-1)e^{2x}$;

b) $y = x^2\sqrt{e^{4x}+1}$;

c) $y = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$;

d) $y = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$.

50. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

a) $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$;

b) $y = \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x$.

51. Vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$;

b) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

52. Sử dụng công thức $L(dB) = 10\log\dfrac{I}{I_0}$ (xem bài đọc thêm "Lôgarit trong một số công thức đo lường" tr.99), hãy tính gần đúng, chính xác đến hàng đơn vị, độ lớn (dB) của âm thanh có tỉ số $\dfrac{I}{I_0}$ cho trong bảng sau rồi điền vào cột còn trống :

STT	Loại âm thanh	$\dfrac{I}{I_0}$	Độ lớn (L)
1	Ngưỡng nghe	1	
2	Nhạc êm dịu	4000	
3	Nhạc mạnh phát ra từ loa	$6,8.10^8$	
4	Tiếng máy bay phản lực	$2,3.10^{12}$	
5	Ngưỡng đau tai	10^{13}	

53. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$.

54. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = (3x-2)\ln^2 x$; b) $y = \sqrt{x^2+1}\,\ln x^2$;

c) $y = x.\ln\dfrac{1}{1+x}$; d) $y = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$.

55. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến trên khoảng xác định của nó ?

a) $y = \log_{\frac{2}{e}} x$; b) $y = \log_a x$ với $a = \dfrac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$.

56. Vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \log_{\sqrt{2}} x$; b) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$.

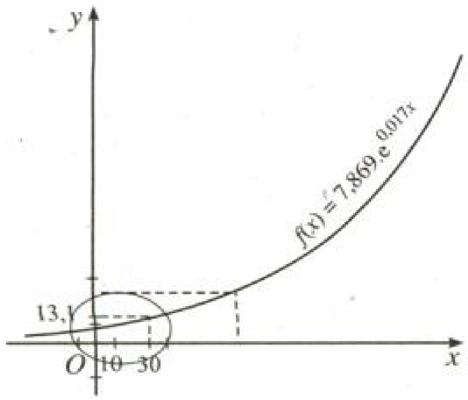
Em có biết

ƯỚC TÍNH DÂN SỐ VIỆT NAM

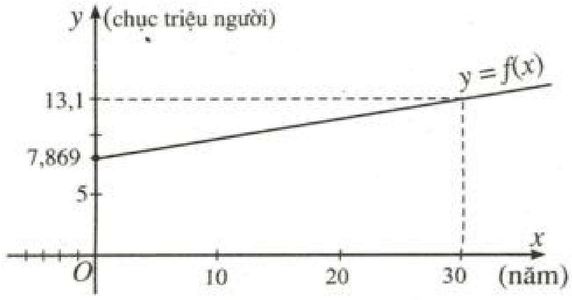
Năm 2001, dân số nước ta khoảng 78 690 000 người. Theo công thức tăng trưởng mũ, nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm luôn là 1,7% thì ước tính số dân Việt Nam x năm sau sẽ là $78\,690\,000.e^{0,017x}$ (người) = $7,869.e^{0,017x}$ (chục triệu người). Để phần nào thấy được mức độ tăng nhanh của dân số, ta xét hàm số

$$f(x) = 7,869.e^{0,017x}.$$

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ (h.2.8) cho thấy khoảng 30 năm sau (tức là khoảng năm 2031), dân số nước ta sẽ vào khoảng 131 triệu người, tức là tăng gấp rưỡi. Chính vì vậy, để đảm bảo nền kinh tế phát triển bền vững, Đảng và Nhà nước ta luôn quan tâm đến vấn đề dân số và kế hoạch hoá gia đình.



Hình 2.8a
Đồ thị hàm số y = f(x)



Hình 2.8b
Hình ảnh phóng to một phần của h.2.8a