§ 6 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC

1. Các bước khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Trong hai bài §6 và §7 ta sẽ sử dụng những điều đã trình bày trong các bài trước để khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số. Ta sẽ chỉ đề cập đến một số hàm số đơn giản. Khi khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số, ta tiến hành các bước sau đây :

1°. Tìm tập xác định của hàm số.

2°. Xét sự biến thiên của hàm số

a) Tìm giới hạn tại vô cực và giới hạn vô cực (nếu có) của hàm số.

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).

b) Lập bảng biến thiên của hàm số, bao gồm :

Tìm đạo hàm của hàm số, xét dấu đạo hàm, xét chiều biến thiên và tìm cực trị của hàm số (nếu có), điền các kết quả vào bảng.

3°. Vẽ đồ thị của hàm số

• Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).

• Xác định một số điểm đặc biệt của đồ thị, chẳng hạn tìm giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ. (Trong trường hợp đồ thị không cắt các trục toạ độ hoặc việc tìm toạ độ giao điểm phức tạp thì bỏ qua phần này).

• Nhận xét về đồ thị : Chỉ ra trục và tâm đối xứng của đồ thị (nếu có, không yêu cầu chứng minh).

2. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số

$$y = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5).$$

Giải

1°. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

2°. Sự biến thiên của hàm số

a) Giới hạn của hàm số tại vô cực

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty \text{ và } \lim_{x \to +\infty} y = +\infty.$$

b) Bảng biến thiên

Ta có $\quad y' = \frac{1}{8}(3x^2 - 6x - 9)$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 3.$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(3 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1 ; 3)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$; giá trị cực đại của hàm số là $y(-1) = 0$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(3) = -4$.

3°. *Đồ thị* (h.1.13)

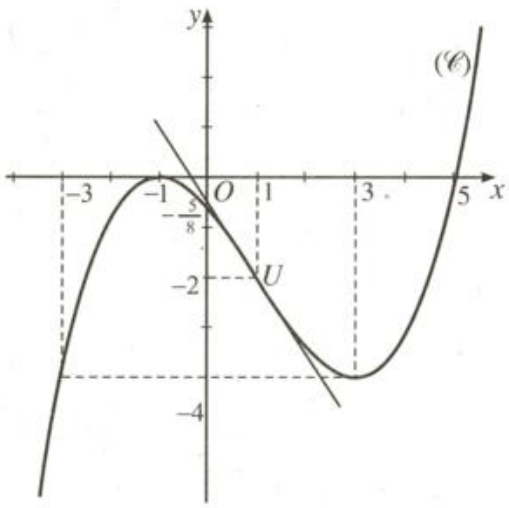
Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $\left(0 ; -\frac{5}{8}\right)$. Ta có

$$y = 0 \quad \Leftrightarrow (x+1)^2(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 5.$$

Vậy đồ thị và trục hoành có hai điểm chung là $(-1 ; 0)$ và $(5 ; 0)$.

Ngoài ra đồ thị còn đi qua một điểm đặc biệt gọi là điểm uốn của nó mà ta sẽ đề cập sau đây.



Hình 1.13

Điểm uốn của đồ thị

Gọi U là điểm thuộc đồ thị $(\mathscr{C})$ trong ví dụ 1 có hoành độ là nghiệm của phương trình $y'' = 0$. Ta có $y'' = \frac{1}{8}(6x - 6)$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Toạ độ của điểm U là $(1 ; -2)$.

Có thể chứng minh được rằng trên khoảng $(-\infty ; 1)$ đường cong $(\mathscr{C})$ nằm phía dưới tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại U, còn trên khoảng $(1 ; +\infty)$ đường cong $(\mathscr{C})$ nằm phía trên tiếp tuyến đó. Người ta nói rằng tiếp tuyến tại điểm U xuyên qua đường cong. Điểm U được gọi là điểm uốn của đường cong $(\mathscr{C})$.

Một cách tổng quát, ta có khái niệm điểm uốn như sau :

Điểm $U(x_0 ; f(x_0))$ được gọi là điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a ; b)$ chứa điểm x_0 sao cho trên một trong hai khoảng $(a ; x_0)$ và $(x_0 ; b)$ tiếp tuyến của đồ thị tại điểm U nằm phía trên đồ thị còn trên khoảng kia tiếp tuyến nằm phía dưới đồ thị (xem bài tập 30). Người ta nói rằng tiếp tuyến tại điểm uốn xuyên qua đồ thị (xem hình 1.13). Để tìm điểm uốn của đồ thị có thể sử dụng điều khẳng định đã được chứng minh sau đây.

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên một khoảng chứa điểm x_0, $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì $U(x_0 ; f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ. Tìm điểm uốn của đồ thị hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + \frac{4}{3}$.

Giải. Ta có $f'(x) = -x^2 + 2x + 3$, $f''(x) = -2x + 2$ và $f''(x) = 0$ tại điểm $x_0 = 1$. Vì $f''(x)$ đổi dấu (từ dương sang âm) khi x qua điểm $x_0 = 1$ nên $U(1 ; 5)$ là điểm uốn của đồ thị hàm số đã cho. □

Dễ chứng minh được rằng :

Đồ thị của hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ luôn có một điểm uốn và điểm đó là tâm đối xứng của đồ thị.

Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2.$$

Giải

1°. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

2°. Sự biến thiên của hàm số

a) Giới hạn của hàm số tại vô cực

$$\lim_{x \to -\infty} y = +\infty \text{ và } \lim_{x \to +\infty} y = -\infty.$$

b) Bảng biến thiên

Ta có $\qquad y' = -3x^2 + 6x - 4.$

Vì $y' < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Hàm số không có cực trị.

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3°. Đồ thị (h.1.14)

• Điểm uốn

Đạo hàm cấp hai của hàm số là $y'' = -6x + 6$.

$y'' = 0$ tại điểm $x = 1$ và y'' đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm $x = 1$.

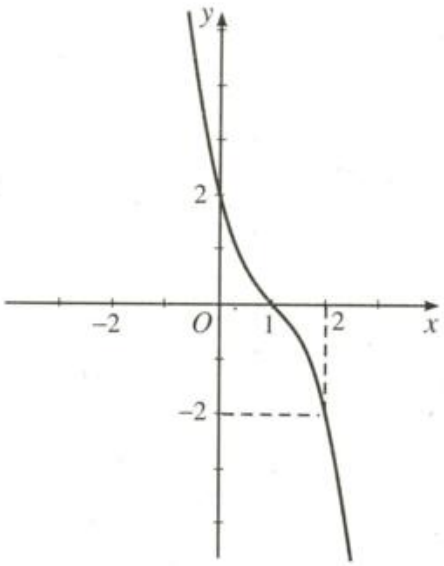
Vậy $U(1\,;0)$ là điểm uốn của đồ thị.

• Giao điểm của đồ thị với trục toạ độ

Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $(0\,;2)$.

Phương trình $y = 0$ hay $(x-1)(x^2-2x+2)=0$ có nghiệm $x = 1$.

Do đó, đồ thị cắt trục hoành tại điểm $(1\,;0)$.



Hình 1.14

Nhận xét : Đồ thị nhận điểm uốn $U(1\,;0)$ làm tâm đối xứng.

3. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$

Ví dụ 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = x^4 - 2x^2 - 3.$$

Giải

1°. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

2°. Sự biến thiên của hàm số

a) Giới hạn của hàm số tại vô cực

$$\lim_{x \to -\infty} y = +\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x \to +\infty} y = +\infty.$$

b) Bảng biến thiên

Ta có $\quad y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

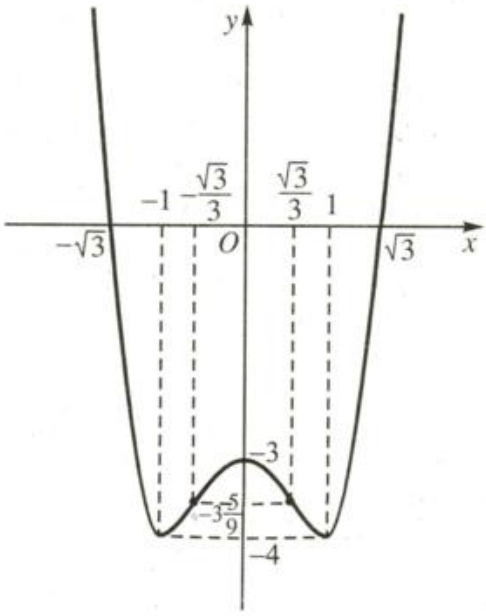
Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(0 ; 1)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(-1 ; 0)$ và $(1 ; +\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$, giá trị cực đại của hàm số là $y(0) = -3$. Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm 1$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm 1) = -4$.

3°. Đồ thị (h.1.15)

• Điểm uốn

Ta có $y'' = 12x^2 - 4$.



Hình 1.15

$y'' = 0$ tại các điểm $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ và y'' đổi dấu khi x qua mỗi điểm x_1 và x_2.

Do đó $U_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -3\frac{5}{9}\right)$ và $U_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -3\frac{5}{9}\right)$ là hai điểm uốn của đồ thị.

• Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $(0; -3)$.

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Vậy đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm $(-\sqrt{3}; 0)$ và $(\sqrt{3}; 0)$.

Nhận xét : Hàm số đã cho là hàm số chẵn nên đồ thị của nó nhận trục tung làm trục đối xứng.

Ví dụ 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = -x^4 - 2x^2 + 3.$$

Giải

1°. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

2°. Sự biến thiên của hàm số

a) Giới hạn của hàm số tại vô cực

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty \text{ và } \lim_{x \to +\infty} y = -\infty.$$

b) Bảng biến thiên

Ta có $\quad y' = -4x^3 - 4x = -4x(x^2 + 1)$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; giá trị cực đại của hàm số là $y(0) = 3$.

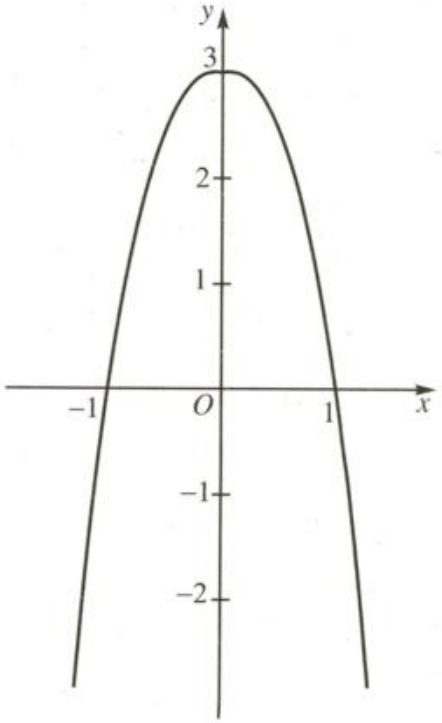
3°. *Đồ thị* (h.1.16)

Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $(0\ ;\ 3)$. Ta có

$$y = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm $(-1\ ;\ 0)$ và $(1\ ;\ 0)$.

Nhận xét : Hàm số đã cho là hàm số chẵn nên đồ thị của nó nhận trục tung làm trục đối xứng.



Hình 1.16

CHÚ Ý

Gọi $(\mathscr{C})$ là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$.

Người ta chứng minh được rằng

1) Nếu phương trình

$$f''(x) = 0 \qquad (1)$$

có hai nghiệm phân biệt $x = \pm x_0\ (x_0 > 0)$ thì đồ thị $(\mathscr{C})$ có hai điểm uốn $U_1(x_0\ ;\ f(x_0))$ và $U_2(-x_0\ ;\ f(-x_0))$ đối xứng với nhau qua trục tung.

2) Nếu phương trình (1) có một nghiệm kép hoặc vô nghiệm thì đồ thị $(\mathscr{C})$ không có điểm uốn.

(Dễ thấy rằng đồ thị hàm số trong ví dụ 4 không có điểm uốn).

Câu hỏi và bài tập

40. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = x^3 + 3x^2 - 4.$$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn.

c) Chứng minh rằng điểm uốn là tâm đối xứng của đồ thị.

41. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = -x^3 + 3x^2 - 1.$$

b) Tuỳ theo các giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình

$$-x^3 + 3x^2 - 1 = m.$$

42. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{5}{3}$; b) $y = x^3 - 3x + 1$;

c) $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - \frac{2}{3}$; d) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

43. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = -x^4 + 2x^2 - 2.$$

b) Tuỳ theo các giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình

$$-x^4 + 2x^2 - 2 = m.$$

c) Viết phương trình tiếp tuyến tại các điểm uốn của đồ thị ở câu a).

44. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = x^4 - 3x^2 + 2$; b) $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.

Luyện tập

45. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = x^3 - 3x^2 + 1.$$

b) Tuỳ theo các giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3x^2 + m + 2 = 0.$$

46. Cho hàm số

$$y = (x + 1)(x^2 + 2mx + m + 2).$$

a) Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = -1$.

47. Cho hàm số

$$y = x^4 - (m + 1)x^2 + m.$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 2$.

b) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số đã cho luôn đi qua hai điểm cố định với mọi giá trị của m.

48. Cho hàm số

$$y = x^4 - 2mx^2 + 2m.$$

a) Tìm các giá trị của m sao cho hàm số có ba điểm cực trị.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = \frac{1}{2}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm uốn.