

1. Hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0$ và $ad - bc \neq 0$)

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{2x - 1}{x - 1}.$$

Giải

1°. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2°. Sự biến thiên của hàm số

a) Giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực và các đường tiệm cận

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$. Do đó, đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận

đứng của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \rightarrow 1^-$ và khi $x \rightarrow 1^+$).

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$).

b) Bảng biến thiên

Ta có
$$y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0 \text{ với mọi } x \neq 1.$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	2		$+\infty$
	$\rightarrow -\infty$		$\rightarrow 2$

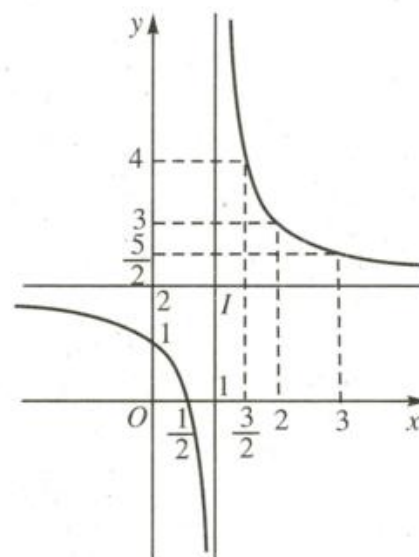
Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

3°. Đồ thị (h.1.17)

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$ và cắt trục hoành tại điểm $(\frac{1}{2}; 0)$.

Nhận xét: Đồ thị nhận giao điểm $I(1; 2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

H1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1-x}{x+2}$.



Hình 1.17

2. Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ ($a \neq 0, a' \neq 0$)

Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

Giải

1°. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2°. Sự biến thiên của hàm số

a) Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận

Ta viết hàm số đã cho dưới dạng

$$y = x + 1 + \frac{1}{x + 1}.$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.

Vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \rightarrow (-1)^-$ và khi $x \rightarrow (-1)^+$).

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 1} = 0$, và $\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x + 1)] = 0$ nên đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$).

b) Bảng biến thiên

Ta có : $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -2.$$

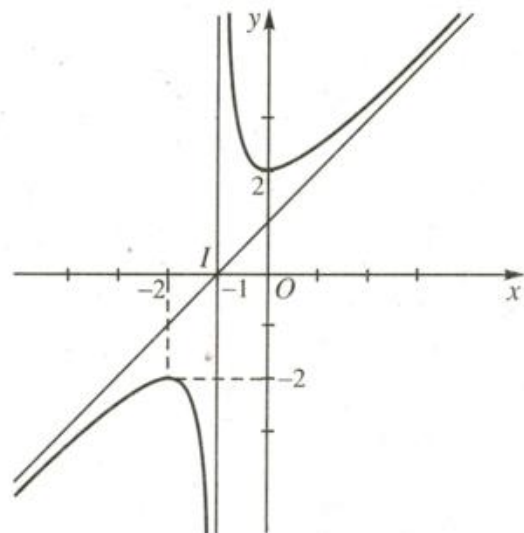
x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	$-\infty$	2	$+\infty$	

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.
Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$ với giá trị cực đại $y(-2) = -2$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$ với giá trị cực tiểu $y(0) = 2$.

3°. Đồ thị (h.1.18)

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; 2)$.

Nhận xét : Đồ thị nhận giao điểm $I(-1; 0)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



Hình 1.18

Ví dụ 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}.$$

Giải. Có thể viết hàm số đã cho dưới dạng

$$y = x - \frac{3}{x - 2}.$$

1°. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2°. Sự biến thiên của hàm số

a) Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} y = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 2^+} y = -\infty.$$

Do đó, đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \rightarrow 2^-$ và khi $x \rightarrow 2^+$).

Vì $y - x = \frac{-3}{x - 2} \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$ nên đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$).

b) Bảng biến thiên

Vì $y' = 1 + \frac{3}{(x - 2)^2} > 0$ với mọi $x \neq 2$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 2)$ và $(2 ; +\infty)$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+		+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

3°. Đồ thị (h.1.19)

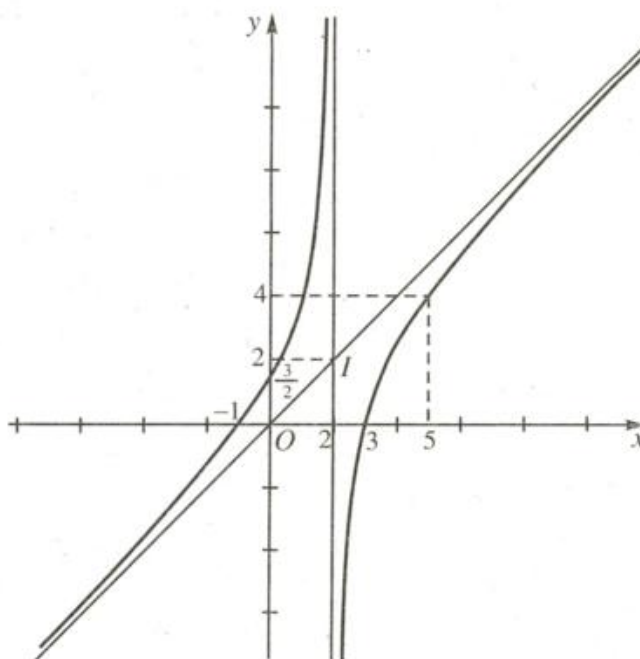
• Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. Ta có

$$y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 3.$$

Vậy đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm $(-1; 0)$ và $(3; 0)$.

Nhận xét : Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2; 2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

H2 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 - 2x}{x + 1}$.



Hình 1.19

Câu hỏi và bài tập

49. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x - 2}{2x + 1}.$$

b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị là tâm đối xứng của đồ thị.

50. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \frac{x + 1}{x - 1}$;

b) $y = \frac{2x + 1}{1 - 3x}$.

51. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}.$$

b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị là tâm đối xứng của đồ thị.

c) Tùy theo các giá trị của m , hãy biện luận số nghiệm của phương trình

$$\frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2} + m = 0.$$

52. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$;

b) $y = \frac{2x^2 - x + 1}{1 - x}$;

c) $y = \frac{2x^2 + 3x - 3}{x + 2}$;

d) $y = -x + 2 + \frac{1}{x - 1}$.

Luyện tập

53. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x + 1}{x - 2}$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại giao điểm A của đồ thị với trục tung.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho, biết rằng tiếp tuyến đó song song với tiếp tuyến tại điểm A .

54. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (\mathcal{H}) của hàm số $y = 1 - \frac{1}{x + 1}$.

b) Từ đồ thị (\mathcal{H}) suy ra cách vẽ đồ thị của hàm số $y = -1 + \frac{1}{x + 1}$.

55. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x - \frac{2}{x - 1}$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $(3 ; 3)$.

56. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (\mathcal{C}) của hàm số $y = \frac{x^2}{x + 1}$.

b) Từ đồ thị (\mathcal{C}) suy ra cách vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2}{|x + 1|}$.