§ 3 LÔGARIT

Trong bài này chúng ta sẽ tìm hiểu một trong những phép toán quan trọng có nhiều ứng dụng trong thực tiễn, đó là lôgarit.

1. Định nghĩa và ví dụ

Trước tiên, ta có những lưu ý sau về luỹ thừa của cơ số a :

Cho số a dương. Với mỗi số thực α tuỳ ý, ta luôn xác định được luỹ thừa a^{α}. Hơn nữa, ta có

a^{α} là một số dương ;

Nếu $a = 1$ thì $a^{\alpha} = 1^{\alpha} = 1$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$;

Nếu $a > 1$ thì $a^{\alpha} < a^{\beta}$ khi và chỉ khi $\alpha < \beta$;

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{\alpha} < a^{\beta}$ khi và chỉ khi $\alpha > \beta$.

Từ đó, suy ra

Nếu $0 < a \neq 1$ thì $a^{\alpha} = a^{\beta}$ khi và chỉ khi $\alpha = \beta$.

Ngược lại, ta thừa nhận rằng khi a là một số dương khác 1 thì với mỗi số dương b, có một số α để

$$a^{\alpha} = b.$$

Theo lưu ý ở trên, số α đó là duy nhất. Từ đó, ta có định nghĩa sau :

ĐỊNH NGHĨA 1

Cho a là một số dương khác 1 và b là một số dương. Số thực α để $a^{\alpha} = b$ được gọi là **lôgarit cơ số *a* của *b*** và kí hiệu là $\log_a b$, tức là

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b.$$

Ví dụ 1

$\log_{10} 100 = 2$ vì $10^2 = 100$; $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$ vì $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$.

CHÚ Ý

1) Không có lôgarit của số 0 và số âm vì a^{α} luôn dương với mọi α.

2) Cơ số của lôgarit phải dương và khác 1.

3) Theo định nghĩa lôgarit, ta có

$$\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1 ;$$

$$\log_a a^b = b,\ \forall b \in \mathbb{R} ; \qquad (1)$$

$$a^{\log_a b} = b,\ \forall b \in \mathbb{R}, b > 0. \qquad (2)$$

Hai công thức (1) và (2) nói lên rằng phép lấy lôgarit và phép nâng lên luỹ thừa là hai phép toán ngược của nhau. Cụ thể, với số a dương khác 1 ta có

Với mọi số thực b

$$b \xmapsto[\text{nâng lên luỹ thừa cơ số } a]{} a^b \xmapsto[\text{lấy lôgarit cơ số } a]{} \log_a a^b = b;$$

Với mọi số thực b dương

$$b \xmapsto[\text{lấy lôgarit cơ số } a]{} \log_a b \xmapsto[\text{nâng lên luỹ thừa cơ số } a]{} a^{\log_a b} = b.$$

Ví dụ 2

$$\log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\ ;\ \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2.$$

H1 *Tính*

a) $\log_2 \frac{1}{2}$; $\log_{10} \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$; *b)* $9^{\log_3 12}$; $0{,}125^{\log_{0,5} 1}$.

H2 *Với giá trị nào của x thì* $\log_3 (1 - x) = 2$ *?*

2. Tính chất

a) So sánh hai lôgarit cùng cơ số

Từ những lưu ý của mục 1, dễ dàng chứng minh được

ĐỊNH LÍ 1

> Cho số dương a khác 1 và các số dương b, c.
>
> 1) Khi $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$;
>
> 2) Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

Ta chứng minh 1).

Vì $a > 1$ nên, theo lưu ý của mục 1, ta có

$$\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow a^{\log_a b} > a^{\log_a c} \Leftrightarrow b > c. \qquad \square$$

H3 *Hãy chứng minh 2).*

Từ định lí 1, ta có

HỆ QUẢ

Cho số a dương khác 1 và các số dương b, c.

1) Khi $a > 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$.

2) Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$.

3) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

Ví dụ 3. Hãy so sánh $\log_{\frac{3}{5}} \frac{2}{3}$ và $\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{5}$.

Giải. Vì $\frac{3}{5} < 1$ và $\frac{2}{3} < 1$ nên $\log_{\frac{3}{5}} \frac{2}{3} > \log_{\frac{3}{5}} 1 = 0$.

Vì $\frac{3}{2} > 1$ và $\frac{3}{5} < 1$ nên $\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{5} < \log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$.

Từ đó suy ra $\log_{\frac{3}{5}} \frac{2}{3} > \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{5}$.

b) Các quy tắc tính lôgarit

Từ định nghĩa lôgarit và tính chất của luỹ thừa, ta suy ra các quy tắc tính lôgarit.

ĐỊNH LÍ 2

Với số a dương khác 1 và các số dương b, c, ta có

1) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$;

2) $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;

3) $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$.

CHÚ Ý

Bằng quy nạp, suy ra rằng với các số dương $b_1, b_2, ..., b_n$, ta có

$$\log_a(b_1b_2...b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + ... + \log_a b_n.$$

H4 *Khẳng định sau đúng hay sai ? Vì sao ?*

$\forall x \in (-\infty ; -1)$, $\log_a(x^2 - 1) = \log_a(x+1) + \log_a(x-1)$.

Từ định lí 2 dễ dàng suy ra

HỆ QUẢ

Với số a dương khác 1, số dương b và số nguyên dương n, ta có

1) $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$;

2) $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$.

Ví dụ 4

$$\frac{\log_7 16}{\log_7 15 - \log_7 30} = \frac{\log_7 16}{\log_7 \frac{15}{30}} = \frac{\log_7 2^4}{\log_7 2^{-1}} = \frac{4\log_7 2}{-\log_7 2} = -4.$$

H5 *Tính* $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50$.

3. Đổi cơ số của lôgarit

Trong tính toán, đôi khi ta cần biết mối liên hệ giữa những lôgarit với cơ số khác nhau.

Sau đây là công thức đổi cơ số của lôgarit.

ĐỊNH LÍ 3

Với a, b là hai số dương khác 1 và c là số dương, ta có

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} \quad \text{hay} \quad \log_a b.\log_b c = \log_a c.$$

Chứng minh

Thật vậy, ta có $c = b^{\log_b c}$, từ đó

$$\log_a c = \log_a(b^{\log_b c}) = \log_b c.\log_a b.$$

Vì $b \neq 1$ nên $\log_a b \neq 0$, do đó

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}. \qquad \square$$

Từ công thức đổi cơ số của lôgarit, với $c = a$, ta suy ra

HỆ QUẢ 1

> Với a và b là hai số dương khác 1, ta có
>
> $$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \text{ hay } \log_a b.\log_b a = 1.$$

Cũng trong công thức đổi cơ số đó, với $b = a^\alpha$ $(\alpha \neq 0)$, ta có

HỆ QUẢ 2

> Với a là số dương khác 1, c là số dương và $\alpha \neq 0$, ta có
>
> $$\log_{a^\alpha} c = \frac{1}{\alpha}.\log_a c.$$

Ví dụ 5. $\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_3 4.\log_2 3\right) = \log_{\frac{1}{4}}\left(2\log_3 2.\log_2 3\right) = \log_{\frac{1}{4}} 2 = \log_{2^{-2}} 2$

$$= -\frac{1}{2}\log_2 2 = -\frac{1}{2}.$$

H6 *Tìm x, biết* $\log_3 x + \log_9 x = \frac{3}{2}$.

Nhận xét. Nhờ công thức đổi cơ số của lôgarit, khi biết lôgarit cơ số a, ta có thể tính được lôgarit cơ số bất kì. Chẳng hạn, ta có thể tính được các lôgarit cơ số 2, cơ số 3, . . . theo lôgarit cơ số 10.

4. Lôgarit thập phân và ứng dụng

Trong thực hành ta hay dùng hệ đếm thập phân (hệ đếm cơ số 10) ; chính vì vậy lôgarit thập phân (lôgarit cơ số 10) chiếm một vị trí quan trọng trong tính toán. Năm 1617 người ta đã xây dựng được bảng lôgarit thập phân để tìm giá trị gần đúng lôgarit thập phân của một số thực dương bất kì (xem bài **Em có biết** "Về lịch sử phát minh lôgarit và bảng lôgarit" trang 91). Ngày nay thay vì dùng bảng, người ta thường dùng máy tính bỏ túi.

ĐỊNH NGHĨA 2

> Lôgarit cơ số 10 của một số dương x được gọi là **lôgarit thập phân của x** và kí hiệu là $\log x$ (hoặc là $\lg x$).

Lôgarit thập phân có đầy đủ các tính chất của lôgarit với cơ số lớn hơn 1.

• Trước khi có máy tính, để tính các luỹ thừa với số mũ phức tạp, người ta thường dùng phương pháp "lôgarit hoá" với lôgarit cơ số 10 và các tính toán được thực hiện nhờ bảng số.

Ví dụ 6. Để tính $2,1^{3,2}$ người ta làm như sau :

– Tính $\log 2,1^{3,2}$

$$\log 2,1^{3,2} = 3,2\log 2,1 \approx 1,0311 \ ;$$

– Từ đó suy ra $2,1^{3,2} \approx 10^{1,0311} \approx 10,7424$. □

• Người ta còn dùng phương pháp "lôgarit hoá" và các tính chất của lôgarit để giải quyết một số bài toán liên quan đến luỹ thừa.

Ví dụ 7

Một người gửi 6 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất 7,56% một năm. Hỏi sau bao nhiêu năm người gửi sẽ có ít nhất 12 triệu đồng từ số tiền gửi ban đầu (giả sử lãi suất không thay đổi) ?

Giải

Theo công thức lãi kép $C = A(1 + r)^N$, sau N năm gửi, người gửi sẽ có một số tiền là

$$6(1 + 0,0756)^N.$$

Từ đó, ta phải tìm N sao cho

$$12 = 6(1 + 0,0756)^N. \qquad (1)$$

Lấy lôgarit thập phân hai vế của đẳng thức (1), ta được

$$\log 12 = \log 6 + N \log 1{,}0756.$$

Suy ra $$N = \frac{\log 12 - \log 6}{\log 1{,}0756} \approx 9{,}51.$$

Vậy sau khoảng 10 năm người gửi sẽ có ít nhất 12 triệu đồng từ số vốn 6 triệu đồng ban đầu.

• Rõ ràng khi $x = 10^n$ thì $\log x = n$. Còn với số $x \geq 1$ tuỳ ý, viết x trong hệ thập phân thì số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x là $n + 1$, trong đó n là phần nguyên của $\log x$, $n = [\log x]$.

Thật vậy, vì 10^n là số tự nhiên bé nhất có $n + 1$ chữ số nên số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x bằng $n + 1$ khi và chỉ khi $10^n \leq x < 10^{n+1}$, tức là $n \leq \log x < n + 1$; điều này chứng tỏ $n = [\log x]$.

Ví dụ 8. Để tìm số các chữ số của 2^{2008} khi viết trong hệ thập phân người ta lấy giá trị gần đúng của $\log 2$ là $0{,}3010$ và được

$$[2008.\log 2] + 1 = [2008.0{,}3010] + 1 = [604{,}408] + 1 = 605.$$

Vậy số 2^{2008} có 605 chữ số.

H7 *Khi viết 2^{1000} trong hệ thập phân ta được một số có bao nhiêu chữ số ? (lấy giá trị gần đúng của $\log 2$ là $0{,}3010$).*

Câu hỏi và bài tập

23. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

a) Cơ số của lôgarit là một số thực bất kì ;

b) Cơ số của lôgarit phải là số nguyên ;

c) Cơ số của lôgarit phải là số nguyên dương ;

d) Cơ số của lôgarit phải là số dương khác 1.

24. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) Có lôgarit của một số thực bất kì.

b) Chỉ có lôgarit của một số thực dương.

c) Chỉ có lôgarit của một số thực dương khác 1.

d) Chỉ có lôgarit của một số thực lớn hơn 1.

25. Điền thêm vế còn lại của đẳng thức và bổ sung điều kiện để có đẳng thức đúng.

a) $\log_a(xy) = \ldots$;

b) $\ldots = \log_a x - \log_a y$;

c) $\log_a x^\alpha = \ldots$;

d) $a^{\log_a b} = \ldots$.

26. Trong mỗi mệnh đề sau, hãy tìm điều kiện của a để có mệnh đề đúng :

a) $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow 0 < x < y$;

b) $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y > 0$.

27. Hãy tìm lôgarit của mỗi số sau theo cơ số 3 :

$$3\ ;\quad 81\ ;\quad 1\ ;\quad \frac{1}{9}\ ;\quad \sqrt[3]{3}\ ;\quad \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

28. Tính $\log_{\frac{1}{5}} 125$; $\log_{0,5} \frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$; $\log_{\frac{1}{6}} 36$.

29. Tính $3^{\log_3 18}$; $3^{5\log_3 2}$; $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 5}$; $\left(\frac{1}{32}\right)^{\log_{0,5} 2}$.

30. Tìm x, biết

a) $\log_5 x = 4$;

b) $\log_2(5 - x) = 3$;

c) $\log_3(x + 2) = 3$;

d) $\log_{\frac{1}{6}}(0,5 + x) = -1$.

31. Biểu thị các lôgarit sau đây theo lôgarit thập phân (rồi cho kết quả bằng máy tính, làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) :

$$\log_7 25\ ;\quad \log_5 8\ ;\quad \log_9 0,75\ ;\quad \log_{0,75} 1,13.$$

Em có biết

VỀ LỊCH SỬ PHÁT MINH LÔGARIT VÀ BẢNG LÔGARIT

Lôgarit là phát minh của Nê-pe (J. Napier hay J. Neper 1550 – 1617) – một điền chủ và nhà thần học người Xcôt-len. Nê-pe bị toán học lôi cuốn và ông coi toán học là niềm vui giải trí của mình. Trong vòng 20 năm trời, những lúc rảnh rỗi, Nê-pe đã phát triển lí thuyết lôgarit và ông đã trình bày vấn đề này trong một cuốn sách viết bằng chữ La-tinh in năm 1614 với đầu đề "Mô tả một bảng lôgarit kì diệu" (từ "lôgarit" có gốc là những từ Hi Lạp : logos nghĩa là tỉ lệ, arithmos nghĩa là số). Ông hi vọng phát minh của mình sẽ giúp đơn giản hoá nhiều phép tính trong thiên văn, đó là những phép tính đòi hỏi nhiều công sức và thời gian.

John Napier
(1550 – 1617)

Thực tế, lôgarit của Nê-pe đã làm cuộc cách mạng trong thiên văn và trong nhiều lĩnh vực toán học bằng cách thay thế việc thực hiện "phép tính nhân, chia, tính căn bậc hai, căn bậc ba của những số lớn mà bên cạnh việc tiêu phí thời gian một cách tẻ nhạt, người ta còn hay bị nhầm lẫn" bằng thực hiện các phép tính cộng, trừ đơn giản những số tương ứng. Phát minh của Nê-pe là một phương thức tiết kiệm thời gian đáng kể.

Một số nhà sử học coi rằng việc sử dụng lôgarit để đơn giản các phép tính đã giúp nhà thiên văn người Đức Giô-han Kê-ple (J. Kepler) phát hiện ba quy luật chuyển động của hành tinh mà điều này lại giúp nhà vật lí người Anh Niu-tơn (I. Newton) phát hiện lí thuyết hấp dẫn. Sau phát minh của Nê-pe 200 năm, nhà toán học Pháp La-pla-xơ (P. Laplace) viết rằng : Lôgarit, bằng cách giảm bớt công sức tính toán, đã kéo dài tuổi thọ gấp hai lần cho các nhà thiên văn.

Các bảng lôgarit ban đầu của Nê-pe còn nhiều khiếm khuyết. Một nhà toán học người Anh là Hen-ry Bric (H. Briggs) đọc công trình của Nê-pe (bằng chữ La-tinh) ngay sau khi nó được công bố, lập tức thấy được ý nghĩa của phát minh kì diệu này. Bric viết thư cho Nê-pe đề nghị gặp gỡ trao đổi và nêu ra nhiều cải tiến cho phát minh đó. Hai nhà toán học gặp nhau vào mùa hè năm 1615. Bric đề nghị định nghĩa lại lôgarit thập phân (lôgarit cơ số 10). Thực ra, Nê-pe có nghĩ đến dùng cơ số 10 nhưng đã không đủ sức làm nên các bảng mới. Nê-pe đề nghị Bric xây dựng các bảng như thế.

Sau đó hai năm, các bảng lôgarit thập phân đầu tiên đã được Bric xây dựng. Nê-pe mất năm 1617 trước khi Bric hoàn thành các bảng đó. Nhiều nhà toán học đã tiếp tục xây dựng các bảng lôgarit thập phân trong đó có bảng của Bra-đi-xơ mà ngày nay chúng ta vẫn còn dùng.

Khi viết số thập phân dương a dưới dạng kí hiệu khoa học $a = \alpha.10^n$, với $1 \le \alpha < 10$, $n \in \mathbb{Z}$ thì

$$\log a = \log \alpha + n. \qquad (1)$$

Như vậy, chỉ cần biết $\log \alpha$ với mọi α thuộc [1 ; 10) thì sẽ tính được *lôgarit* thập phân của một số thập phân dương bất kì. Người ta gọi $\log \alpha$ trong (1) là *phần định trị*, n là *phần đặc tính* của $\log a$. Trong các bảng số, người ta cho sẵn giá trị gần đúng phần định trị $\log \alpha$. Bảng của Bra-đi-xơ cho $\log \alpha$ với bốn chữ số thập phân.

Ví dụ. Cho biết $\log 2,319 \approx 0,3653$. Tính $\log 23,19$ và $\log 0,2319$.

Giải

$\log 23,19 = \log(2,319.10) = \log 2,319 + 1 \approx 0,3653 + 1 = 1,3653$;

$\log 0,2319 = \log(2,319.10^{-1}) = \log 2,319 - 1$

$\approx 0,3653 - 1 = -0,6347$.

Luyện tập

32. Hãy tính :

a) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$;

b) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$;

c) $\dfrac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$;

d) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 8^{\log_2 3}$.

33. Hãy so sánh :

a) $\log_3 4$ và $\log_4 \frac{1}{3}$;

b) $3^{\log_6 1,1}$ và $7^{\log_6 0,99}$.

34. Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh :

a) $\log 2 + \log 3$ với $\log 5$;

b) $\log 12 - \log 5$ với $\log 7$;

c) $3\log 2 + \log 3$ với $2\log 5$;

d) $1 + 2\log 3$ với $\log 27$.

35. Trong mỗi trường hợp sau, hãy tính $\log_a x$, biết $\log_a b = 3$, $\log_a c = -2$:

a) $x = a^3 b^2 \sqrt{c}$;

b) $x = \dfrac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3}$.

36. Trong mỗi trường hợp sau, hãy tìm x :

a) $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$; b) $\log_5 x = 2\log_5 a - 3\log_5 b$.

37. Hãy biểu diễn các lôgarit sau qua α và β:

a) $\log_{\sqrt{3}} 50$, nếu $\log_3 15 = \alpha$, $\log_3 10 = \beta$;

b) $\log_4 1250$, nếu $\log_2 5 = \alpha$.

38. Đơn giản các biểu thức sau :

a) $\log\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\log 4 + 4\log\sqrt{2}$; b) $\log\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\log 36 + \frac{3}{2}\log\frac{9}{2}$;

c) $\log 72 - 2\log\frac{27}{256} + \log\sqrt{108}$; d) $\log\frac{1}{8} - \log 0,375 + 2\log\sqrt{0,5625}$.

39. Tìm x, biết :

a) $\log_x 27 = 3$; b) $\log_x \frac{1}{7} = -1$; c) $\log_x \sqrt{5} = -4$.

40. Số nguyên tố dạng $M_p = 2^p - 1$, trong đó p là một số nguyên tố được gọi là số nguyên tố Mec-xen (M. Mersenne, 1588 – 1648, người Pháp).

Ơ-le phát hiện M_{31} năm 1750.

Luy-ca (E. Lucas, 1842 - 1891, người Pháp) phát hiện M_{127} năm 1876.

$M_{1398269}$ được phát hiện năm 1996.

Hỏi rằng nếu viết ba số đó trong hệ thập phân thì mỗi số có bao nhiêu chữ số ?

(Dễ thấy rằng số chữ số của $2^p - 1$ bằng số chữ số của 2^p và để tính số chữ số của M_{127} có thể lấy $\log 2 \approx 0,30$ và để tính số chữ số của $M_{1398269}$ có thể lấy $\log 2 \approx 0,30103$ (xem ví dụ 8)).

41. Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một quý với lãi suất 1,65% một quý. Hỏi sau bao lâu người đó có được ít nhất 20 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu ? (Giả sử lãi suất không thay đổi).