# § 1 LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ

## 1. Luỹ thừa với số mũ nguyên

Nhắc lại rằng với mỗi số nguyên dương $n$, luỹ thừa bậc $n$ của số $a$ (còn gọi là luỹ thừa của $a$ với số mũ $n$) là số $a^n$ xác định bởi

$$a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thừa số}} \quad \text{với } n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

$a$ được gọi là *cơ số*, $n$ được gọi là *số mũ* của luỹ thừa $a^n$.

**H1** *Tính* $\left(\frac{2}{3}\right)^3$, $(-\sqrt{3})^5$, $0^4$.

Để có khái niệm luỹ thừa với số mũ nguyên, ta còn phải định nghĩa luỹ thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm.

### a) Luỹ thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm

ĐỊNH NGHĨA 1

Với $a \neq 0$, $n = 0$ hoặc $n$ là một số nguyên âm, luỹ thừa bậc $n$ của $a$ là số $a^n$ xác định bởi

$$a^0 = 1, \; a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

**Ví dụ 1.** $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$ ; $\left(-\sqrt{2}\right)^0 = 1$.

**Ví dụ 2.** Nếu sử dụng luỹ thừa với số mũ nguyên của 10 để biểu diễn một số, chẳng hạn số 2418,93 dưới dạng :

$$2418,93 = 2.10^3 + 4.10^2 + 1.10 + 8.10^0 + 9.10^{-1} + 3.10^{-2}$$

thì ta thấy trong tổng trên, mỗi số hạng có dạng $a.10^k$, số mũ $k$ chỉ rõ vị trí của chữ số $a$ trong biểu diễn thập phân của số đã cho. Chẳng hạn, với $k = -1$

thì chữ số $a$ ở hàng phần mười, với $k = 0$ thì chữ số $a$ ở hàng đơn vị, với $k = 1$ thì chữ số $a$ ở hàng chục, . . . .

CHÚ Ý

1) Các kí hiệu $0^0$, $0^n$ ($n$ nguyên âm) không có nghĩa.

2) Với $a \neq 0$ và $n$ nguyên, ta có $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$.

3) Người ta thường dùng các luỹ thừa của 10 với số mũ nguyên để biểu thị những số rất lớn và những số rất bé.

Chẳng hạn

Khối lượng của Trái Đất là $5,97.10^{24}$ kg,

Khối lượng nguyên tử của hiđrô là $1,66.10^{-24}$ g,

Trò chơi Rubic (Rubik) có hơn $4.10^{19}$ cách sắp xếp.

**b) Tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên**

***Quy tắc tính***

Từ định nghĩa luỹ thừa với số mũ nguyên của một số, ta thấy các quy tắc tính toán cho luỹ thừa với số mũ tự nhiên vẫn còn đúng với số mũ nguyên. Cụ thể ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

Với $a \neq 0, b \neq 0$ và với các số nguyên $m, n$, ta có

1) $a^m.a^n = a^{m+n}$ ;     2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ;

3) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$ ;     4) $(ab)^n = a^n b^n$ ;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Ta chứng minh công thức 5).

Với $n \geq 0$, công thức hiển nhiên đúng.

Với $n < 0$, ta có $-n$ là số nguyên dương. Do đó

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}} = \frac{1}{\frac{a^{-n}}{b^{-n}}} = \frac{b^{-n}}{a^{-n}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Các công thức khác được chứng minh tương tự.

**H2** *Chứng minh công thức 1) của định lí 1 cho trường hợp $m > 0$, $n \leq 0$ và $m > |n|$.*

***So sánh các luỹ thừa***

ĐỊNH LÍ 2

> Cho $m$, $n$ là những số nguyên. Khi đó
>
> 1) Với $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$ ;
>
> 2) Với $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.

Từ định lí 2, ta có

HỆ QUẢ 1

> Với $0 < a < b$ và $m$ là số nguyên thì
>
> 1) $a^m < b^m$ khi và chỉ khi $m > 0$ ;
>
> 2) $a^m > b^m$ khi và chỉ khi $m < 0$.

*Chứng minh*

Vì $0 < a < b$ nên $\frac{b}{a} > 1$ và $0 < \frac{a}{b} < 1$.

Theo 1) của định lí 2, ta có $\left(\frac{b}{a}\right)^m > \left(\frac{b}{a}\right)^0 \Leftrightarrow m > 0$, hay

$$a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0.$$

Theo 2) của định lí 2, ta có $\left(\frac{a}{b}\right)^m > \left(\frac{a}{b}\right)^0 \Leftrightarrow m < 0$, hay

$$a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0.$$

□

Từ hệ quả 1, ta có thể chứng minh được hai hệ quả sau :

HỆ QUẢ 2

Với $a < b$, $n$ là số tự nhiên lẻ thì

$$a^n < b^n.$$

HỆ QUẢ 3

Với $a, b$ là những số dương, $n$ là một số nguyên khác 0 thì

$$a^n = b^n \text{ khi và chỉ khi } a = b.$$

**H3** *Có phải* $(0,99)^2.99 > 99$? *và* $(0,99)^{-1}.99 > 99$?

## 2. Căn bậc *n* và luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

Ta đã có khái niệm căn bậc hai, căn bậc ba của một số. Sau đây, ta xét khái niệm căn bậc $n$ của một số.

### a) Căn bậc *n*

ĐỊNH NGHĨA 2

Với $n$ nguyên dương, **căn bậc *n*** của số thực $a$ là số thực $b$ sao cho

$$b^n = a.$$

Ta thừa nhận hai khẳng định sau đây.

- *Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n.* Căn đó được kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$.
- *Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau.* Căn có giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (còn gọi là *căn số học bậc n* của $a$), căn có giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$. Đặc biệt, $\sqrt[2]{a}$ được kí hiệu đơn giản là $\sqrt{a}$.

Ví dụ : Số 32 chỉ có một căn bậc năm là $\sqrt[5]{32} = 2$ ; số 64 có hai căn bậc sáu là $\sqrt[6]{64} = 2$ và $-\sqrt[6]{64} = -2$.

*Nhận xét*

1) Căn bậc 1 của số $a$ chính là $a$.

2) Căn bậc $n$ của số 0 là 0.

3) Số âm không có căn bậc chẵn vì luỹ thừa bậc chẵn của một số thực bất kì là số không âm.

4) Với $n$ nguyên dương lẻ, ta có

$$\sqrt[n]{a} > 0 \text{ khi } a > 0\,;$$

$$\sqrt[n]{a} < 0 \text{ khi } a < 0.$$

5) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn.} \end{cases}$

***Một số tính chất của căn bậc n***

Từ các tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên dương, ta có thể chứng minh được các tính chất sau đây.

> Với hai số không âm $a$, $b$, hai số nguyên dương $m$, $n$ và hai số nguyên $p$, $q$ tuỳ ý, ta có
>
> 1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ ;
>
> 2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b > 0)$ ;
>
> 3) $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$ $(a > 0)$ ;
>
> 4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ ;
>
> 5) Nếu $\dfrac{p}{n} = \dfrac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}$ $(a > 0)$.
>
> Đặc biệt $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$.

Các tính chất 1), 2), 3) đã được biết đến đối với căn bậc hai và căn bậc ba.

Ta chứng minh tính chất 5).

Giả sử $\sqrt[n]{a^p} = x$ và $\sqrt[m]{a^q} = y$. Vì $a > 0$ nên $x > 0$, $y > 0$.

Ta có $x^n = a^p$, $y^m = a^q$. Do đó

$$x^{nq} = a^{pq} = y^{mp}.$$

Mặt khác, vì $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ nên $nq = mp$. Bởi vậy, từ $x^{nq} = y^{mp}$ và $x > 0$, $y > 0$, suy ra $x = y$.

Học sinh tự chứng minh tính chất 4). □

**Ví dụ 3**

a) $\sqrt[5]{8}.\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{8.4} = \sqrt[5]{32} = 2.$ b) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}.$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[6]{729} = 3.$ d) $\sqrt[7]{128^3} = \left(\sqrt[7]{128}\right)^3 = 2^3 = 8.$

e) $\sqrt[21]{128} = \sqrt[21]{2^7} = \sqrt[3]{2}.$

**H4** *Chứng minh rằng*

*a) Nếu n là số nguyên dương lẻ và $a < b$ thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ ;*

*b) Nếu n là số nguyên dương chẵn và $0 < a < b$ thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.*

**b) Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ**

ĐỊNH NGHĨA 3

> Cho $a$ là một số thực dương và $r$ là một số hữu tỉ. Giả sử $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m$ là một số nguyên còn $n$ là một số nguyên dương. Khi đó, luỹ thừa của $a$ với số mũ $r$ là số $a^r$ xác định bởi
>
> $$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

***Nhận xét.*** Từ tính chất 5) của căn bậc $n$, ta suy ra rằng số $a^r = a^{\frac{m}{n}}$ là xác định, không phụ thuộc vào phân số $\frac{m}{n}$ biểu diễn số hữu tỉ $r$, tức là nếu $r = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ thì $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}$. Do đó trong biểu thức $a^r$ với $r$ là một số hữu tỉ, ta thường viết $r$ dưới dạng phân số tối giản có mẫu dương.

**Ví dụ 4**

a) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$ ; b) $27^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$.

c) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ($a$ dương, $n$ nguyên dương).

• Có thể chứng minh được rằng luỹ thừa với số mũ hữu tỉ (của số thực dương) có đầy đủ các tính chất như luỹ thừa với số mũ nguyên đã nêu ở trên.

**Ví dụ 5.** Cho $a$, $b$ là những số thực dương. Ta có

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab.$$

## Câu hỏi và bài tập

**1.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) Với số thực $a$ và các số nguyên $m$, $n$, ta có

$$a^m.a^n = a^{m.n} \; ; \; \frac{a^m}{a^n} = a^{m:n}.$$

b) Với hai số thực $a, b$ cùng khác 0 và số nguyên $n$, ta có

$$(ab)^n = a^n b^n \; ; \; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

c) Với hai số thực $a, b$ thoả mãn $0 < a < b$ và số nguyên $n$, ta có

$$a^n < b^n.$$

d) Với số thực $a$ khác 0 và hai số nguyên $m$, $n$, ta có

Nếu $m > n$ thì $a^m > a^n$.

**2.** Xét khẳng định :

"Với số thực $a$ và hai số hữu tỉ $r$, $s$, ta có $(a^r)^s = a^{rs}$".

Với điều kiện nào trong các điều kiện sau thì khẳng định trên đúng ?

(A) $a$ bất kì ; (B) $a \neq 0$ ; (C) $a > 0$ ; (D) $a < 1$.

**3.** Viết các số sau dưới dạng số nguyên hay phân số tối giản :

$$7^{-1}.14 \ ; \quad \frac{4}{3^{-2}} \ ; \quad \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} \ ; \quad \frac{(-18)^2.5}{15^2.3}.$$

**4.** Thực hiện phép tính

a) $81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

b) $0,001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2}.64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + (9^0)^2$;

c) $27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5}$;

d) $(-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}} + 19(-3)^{-3}$.

**5.** Đơn giản biểu thức (với $a$, $b$ là những số dương)

a) $\dfrac{(\sqrt[4]{a^3b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$ ; b) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \dfrac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}}$.

**6.** So sánh các số :

a) $\sqrt{2}$ và $\sqrt[3]{3}$ ; b) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30}$ và $\sqrt[3]{63}$ ; c) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15}$ và $\sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$.

**7.** Chứng minh $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 2$.

*Bài đọc thêm*

## TÍNH GẦN ĐÚNG CĂN BẬC $n$ CỦA MỘT SỐ THẬP PHÂN BẰNG MÁY TÍNH BỎ TÚI.

Có thể dùng máy tính bỏ túi chẳng hạn, máy tính CASIO *fx-500 MS* để tìm giá trị gần đúng căn bậc $n$ của một số thập phân.

**Ví dụ 1.** Để tìm $\sqrt{23,425}$ , ta ấn liên tiếp các phím sau :

$$\boxed{\sqrt{\phantom{x}}}\ 2\ 3\ \boxed{.}\ 4\ 2\ 5\ \boxed{=}.$$

Khi đó, trên màn hình hiện số $4.839938016$. Làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư, ta được

$$\sqrt{23,425} \approx 4,8399.$$

**Ví dụ 2.** Để tìm $\sqrt[3]{8,532}$ , ta ấn liên tiếp các phím sau :

$$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[3]{\phantom{x}}}\ 8\ \boxed{.}\ 5\ 3\ 2\ \boxed{=}.$$

Trên màn hình hiện số $2.043385382$. Làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư, ta được

$$\sqrt[3]{8,532} \approx 2,0434.$$

*Lưu ý :* Khi ấn liên tiếp hai phím $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sqrt[3]{\phantom{x}}}$ ta mới được phím $\boxed{\sqrt[3]{\phantom{x}}}$.

**Ví dụ 3.** Để tính $\sqrt[7]{320}$ , ta ấn liên tiếp các phím sau :

$$7\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[x]{\phantom{x}}}\ 3\ 2\ 0\ \boxed{=}.$$

Trên màn hình hiện số $2.279704562$. Làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư, ta được

$$\sqrt[7]{320} \approx 2,2797.$$

*Lưu ý :* Khi ấn liên tiếp ba phím 7 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sqrt[x]{\phantom{x}}}$, ta mới được phím $\sqrt[7]{\phantom{x}}$.

(Để tính $32^{3,2}$ , ta ấn $3\ 2\ \boxed{\wedge}\ 3\ \boxed{.}\ 2\ \boxed{=}$. Trên màn hình hiện số $65,536$.

Như vậy $32^{3,2} = 65536$.)

## Luyện tập

**8.** Đơn giản biểu thức

a) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$ ; b) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$ ;

c) $\left(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2$ ; d) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}+1.$

**9.** Từ tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên dương, chứng minh

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} \quad (a \geq 0,\ b \geq 0,\ n \text{ nguyên dương}).$$

**10.** Chứng minh

a) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$ ; b) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3.$

**11.** So sánh các số

a) $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{5}{6}}$ và $\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}}$ ; b) $3^{600}$ và $5^{400}$ ;

c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}$ và $\sqrt{2}.2^{\frac{3}{14}}$ ; d) $7^{30}$ và $4^{40}$.