

## § 2

## LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

### 1. Khái niệm luỹ thừa với số mũ thực

Ta đã định nghĩa luỹ thừa với số mũ hữu tỉ. Để định nghĩa luỹ thừa với số mũ thực tùy ý, ta còn phải định nghĩa luỹ thừa với số mũ vô tỉ.

Cho số vô tỉ  $\alpha$ . Ta thừa nhận rằng bao giờ cũng có một dãy số hữu tỉ  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  mà  $\lim r_n = \alpha$ . Chẳng hạn, với

$$\alpha = \sqrt{2} = 1,4142135\dots$$

ta có dãy  $r_1 = 1$  ;  $r_2 = 1,4$  ;  $r_3 = 1,41$  ;  $r_4 = 1,414$  ;  $r_5 = 1,4142$  ;  $r_6 = 1,41421$  ; ... và  $\lim r_n = \sqrt{2}$ .

- Cho  $a$  là một số thực dương và  $\alpha$  là một số vô tỉ. Xét dãy số hữu tỉ  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  mà  $\lim r_n = \alpha$ . Khi đó, người ta chứng minh được rằng dãy số thực  $a^{r_1}, a^{r_2}, \dots, a^{r_n}, \dots$  có giới hạn xác định (không phụ thuộc vào dãy số hữu tỉ  $(r_n)$  đã chọn, tức là nếu còn có dãy hữu tỉ  $(r'_n)$  mà  $\lim r'_n = \alpha$  thì  $\lim a^{r_n} = \lim a^{r'_n}$ ). Ta gọi giới hạn đó là *luỹ thừa của  $a$  với số mũ  $\alpha$* , kí hiệu là  $a^\alpha$ . Vậy

$$a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}.$$

### Ví dụ 1

$\sqrt{2}$  là giới hạn của dãy số

$$1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; \dots$$

nên  $10^{\sqrt{2}}$  là giới hạn của dãy số

$$10^1; 10^{1.4}; 10^{1.41}; 10^{1.414}; 10^{1.4142}; 10^{1.41421}; \dots$$

Giá trị của  $10^{\sqrt{2}}$  bằng 25,95455352....

GHI NHÓ (về cơ số của luỹ thừa)

- Khi xét luỹ thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số phải khác 0.
- Khi xét luỹ thừa với số mũ không nguyên thì cơ số phải dương.

- Người ta chứng minh được rằng luỹ thừa với số mũ thực (của một số dương) có đầy đủ các tính chất như luỹ thừa với số mũ nguyên đã nêu trong §1.

### Ví dụ 2

- a) Với  $a$  là số dương, ta có

$$\frac{(a^{\sqrt{5}+1})^{\sqrt{5}-1}}{a^{7-\sqrt{2}} \cdot a^{-3+\sqrt{2}}} = \frac{a^4}{a^4} = 1.$$

b) Để so sánh các số  $16^{\sqrt{3}}$  và  $4^{3\sqrt{2}}$ , ta đưa về so sánh hai luỹ thừa cùng cơ số.

Ta có  $16^{\sqrt{3}} = 4^{2\sqrt{3}}$ , do đó ta so sánh  $2\sqrt{3}$  và  $3\sqrt{2}$ .

Vì  $(2\sqrt{3})^2 = 2^2 \cdot 3 = 12$ ,  $(3\sqrt{2})^2 = 3^2 \cdot 2 = 18$  nên  $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$ , do đó

$$4^{2\sqrt{3}} < 4^{3\sqrt{2}}, \text{ tức là } 16^{\sqrt{3}} < 4^{3\sqrt{2}}.$$

**H1** Tính  $\left(2^{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\right)^{-3} \cdot 2^{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$ .

## 2. Công thức lãi kép

Gửi tiền vào ngân hàng, ngoài thể thức lãi đơn (tức là tiền lãi của kì trước không được tính vào vốn của kì kế tiếp, nếu đến kì hạn người gửi không rút lãi ra), còn có thể thức *lãi kép theo định kì*. Theo thể thức này, nếu đến kì hạn người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kì kế tiếp. Nếu một người gửi số tiền  $A$  với lãi suất  $r$  mỗi kì thì dễ thấy sau  $N$  kì số tiền người ấy thu được cả vốn lẫn lãi là :

$$C = A(1 + r)^N. \quad (1)$$

(Có thể chứng minh bằng quy nạp theo  $N$ ).

**Ví dụ 3.** Theo thể thức lãi kép, một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng.

a) Nếu theo kì hạn 1 năm với lãi suất 7,56% một năm thì sau 2 năm người đó thu được một số tiền là

$$10 \cdot (1 + 0,0756)^2 \approx 11,569 \text{ (triệu đồng)}.$$

b) Nếu theo kì hạn 3 tháng với lãi suất 1,65% một quý thì sau 2 năm người đó thu được một số tiền là

$$10 \cdot (1 + 0,0165)^8 \approx 11,399 \text{ (triệu đồng)}.$$

**H2** Một người đầu tư 100 triệu đồng vào một công ty theo thể thức lãi kép với lãi suất 13% một năm. Hỏi sau 5 năm mới rút lãi thì người đó thu được bao nhiêu tiền lãi? (Giả sử rằng lãi suất hàng năm không đổi).

## Câu hỏi và bài tập

12. Xét mệnh đề : "Với các số thực  $x, a, b$ , nếu  $0 < a < b$ , thì  $a^x < b^x$ ".

Với điều kiện nào sau đây của  $x$  thì mệnh đề đó là đúng ?

- (A)  $x$  bất kì ;      (B)  $x > 0$  ;      (C)  $x < 0$ .

13. Xét mệnh đề : "Với các số thực  $a, x, y$ , nếu  $x < y$ , thì  $a^x < a^y$ ".

Với điều kiện nào sau đây của  $a$  thì mệnh đề đó là đúng ?

- (A)  $a$  bất kì ;      (B)  $a > 0$  ;      (C)  $a > 1$ .

14. Cho các số thực  $a, x, y$  với  $x < y$ . Hãy tìm điều kiện của  $a$  để  $a^x > a^y$ .

15. Tính giá trị các biểu thức

$$(0,5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}} ; \quad 2^{2-3\sqrt{5}} \cdot 8^{\sqrt{5}} ; \quad 3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 9^{\sqrt[3]{2}}.$$

16. Đơn giản các biểu thức

$$\frac{(a^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} \cdot a^{4-\sqrt{5}}} ; \quad a^{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}.$$

17. Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất 7,56% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi, hỏi số tiền người đó thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 5 năm là bao nhiêu triệu đồng ? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

## Luyện tập

18. Viết các biểu thức sau dưới dạng luỹ thừa của một số với số mũ hữu tỉ :

a)  $\sqrt[4]{x^2 \sqrt[3]{x}}$  ( $x > 0$ ) ;      b)  $\sqrt[5]{\frac{b}{a} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}$  ( $a > 0, b > 0$ ) ;

c)  $\sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}}}$  ;      d)  $\sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}}} : a^{\frac{11}{16}}$  ( $a > 0$ ).

**19.** Đơn giản biểu thức

a)  $a^{-2\sqrt{2}} \left( \frac{1}{a^{-\sqrt{2}-1}} \right)^{\sqrt{2}+1}$  ;

b)  $\left( \frac{a^{\sqrt{3}}}{b^{\sqrt{3}-1}} \right)^{\sqrt{3}+1} \frac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}}$  ;

c)  $\frac{a^{2\sqrt{2}} - b^{2\sqrt{3}}}{\left( a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}} \right)^2} + 1$  ;

d)  $\sqrt{\left( x^\pi + y^\pi \right)^2 - \left( 4^{\frac{1}{\pi}} xy \right)^\pi}$ .

**20.** Tìm các số thực  $\alpha$ , thoả mãn từng điều kiện sau :

a)  $\frac{1}{2}(a^\alpha + a^{-\alpha}) = 1$  ( $a > 0$ ) ;    b)  $3^{|\alpha|} < 27$ .

**21.** Giải các phương trình sau bằng cách đặt  $t = \sqrt[4]{x}$  :

a)  $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 2$  ;                          b)  $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0$ .

**22.** Giải các bất phương trình sau :

a)  $x^4 < 3$  ;    b)  $x^{11} \geq 7$  ;    c)  $x^{10} > 2$  ;    d)  $x^3 \leq 5$ .