

§ 8

MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ

1. Giao điểm của hai đồ thị

Các đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại điểm $M(x_0 ; y_0)$ khi và chỉ khi $y_0 = f(x_0)$ và $y_0 = g(x_0)$, tức là $(x_0 ; y_0)$ là một nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x). \end{cases}$$

Như vậy hoành độ giao điểm của hai đồ thị trên là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

Số nghiệm của phương trình trên bằng số giao điểm của hai đồ thị.

Ví dụ 1. Với các giá trị nào của m , đường thẳng $y = m$ cắt đường cong $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại bốn điểm phân biệt?

Giải

Hoành độ giao điểm của đường thẳng và đường cong đã cho là nghiệm của phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = m$, tức là

$$x^4 - 2x^2 - m - 3 = 0. \quad (1)$$

Đặt $X = x^2$, $X \geq 0$, ta được

$$X^2 - 2X - m - 3 = 0. \quad (2)$$

Đường thẳng cắt đường cong đã cho tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương X_1, X_2 phân biệt, tức là

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ X_1 X_2 > 0 \\ X_1 + X_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 4 > 0 \\ -m - 3 > 0 \Leftrightarrow -4 < m < -3. \\ 2 > 0 \end{cases}$$

□

Nhận xét

Có thể giải bài toán trên bằng đồ thị như sau :

Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ được cho trong hình 1.15.

Đồ thị của hàm số $y = m$ là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành. Dựa vào đồ thị của hai hàm số đã cho, ta thấy ngay rằng đường thẳng và đường cong đã cho cắt nhau tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $-4 < m < -3$.

H1 *Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đường thẳng $y = x - m$ cắt đường cong $y = \frac{-x^2 + 2x}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt.*

2. Sự tiếp xúc của hai đường cong

ĐỊNH NGHĨA

Giả sử hai hàm số f và g có đạo hàm tại điểm x_0 . Ta nói rằng hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm $M(x_0 ; y_0)$ nếu M là một điểm chung của chúng và hai đường cong có tiếp tuyến chung tại điểm M . Điểm M được gọi là tiếp điểm của hai đường cong đã cho.

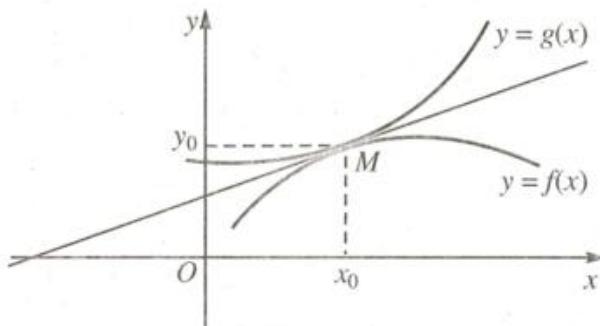
Hiển nhiên các đồ thị của hai hàm số đã cho tiếp xúc với nhau tại điểm $M(x_0 ; y_0)$

(h.1.20) khi và chỉ khi

$$y_0 = f(x_0), \quad y_0 = g(x_0)$$

$$\text{và } f'(x_0) = g'(x_0).$$

Từ đó dễ dàng suy ra rằng



Hình 1.20

Hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

có nghiệm và nghiệm của hệ phương trình trên là hoành độ tiếp điểm của hai đường cong đó.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hai đường cong

$$y = x^3 + \frac{5}{4}x - 2 \text{ và } y = x^2 + x - 2$$

tiếp xúc với nhau tại một điểm nào đó.

Xác định tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong đã cho tại điểm đó.

Giải

Hoành độ tiếp điểm của hai đường cong đã cho là nghiệm của hệ phương trình

$$(I) \quad \begin{cases} x^3 + \frac{5}{4}x - 2 = x^2 + x - 2 \\ \left(x^3 + \frac{5}{4}x - 2 \right)' = (x^2 + x - 2)' \end{cases}$$

Ta có

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 + \frac{x}{4} = 0 \\ 3x^2 + \frac{5}{4} = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy hai đường cong đã cho tiếp xúc với nhau tại điểm $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến chung tại điểm M của hai đường cong đã cho là $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại điểm M là

$$y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{4}, \text{ hay } y = 2x - \frac{9}{4}.$$

[H2] Chứng minh rằng đường cong $y = x^3 - x$ tiếp xúc với parabol $y = x^2 - 1$ tại một điểm nào đó.

Xác định tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại điểm đó.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng đường thẳng $y = px + q$ là tiếp tuyến của parabol $y = ax^2 + bx + c$ khi và chỉ khi phương trình

$$ax^2 + bx + c = px + q$$

hay

$$ax^2 + (b - p)x + c - q = 0 \quad (3)$$

có nghiệm kép, tức là

$$\Delta = (b - p)^2 - 4a(c - q) = 0.$$

Chứng minh

Ta đã biết : Đường thẳng và parabol đã cho tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = px + q \\ (ax^2 + bx + c)' = (px + q)' \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} ax^2 + (b - p)x + c - q = 0 \\ 2ax + b = p \end{cases} \quad (4)$$

có nghiệm.

Nếu đường thẳng tiếp xúc với parabol thì hệ phương trình trên có nghiệm. Giả sử $x = x_0$ là nghiệm của hệ phương trình trên. Khi đó, vì $a \neq 0$ nên từ (4) ta có $x_0 = \frac{p - b}{2a}$. Thay vào (3), ta được

$$a \frac{(p - b)^2}{4a^2} + (b - p) \frac{(p - b)}{2a} + c - q = 0.$$

Từ đó suy ra

$$(b - p)^2 - 4a(c - q) = 0.$$

Vậy phương trình (3) có nghiệm kép.

Đảo lại, nếu phương trình (3) có nghiệm kép x_0 thì $x_0 = \frac{p - b}{2a}$. Hiển nhiên $x = x_0$ cũng là nghiệm của phương trình (4). Vậy hệ phương trình trên có nghiệm. Do đó đường thẳng là tiếp tuyến của parabol.

CHÚ Ý

Có thể áp dụng điều khẳng định trong ví dụ 3 để xét sự tiếp xúc của đường thẳng và parabol.

Ví dụ 4. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(1 ; -2)$ và tiếp xúc với parabol $y = x^2 - 2x$.

Giải

Phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(1 ; -2)$ và có hệ số góc m là $y = m(x - 1) - 2$.

Hoành độ giao điểm của đường thẳng và parabol đã cho là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x = m(x - 1) - 2$, tức là

$$x^2 - (m + 2)x + m + 2 = 0. \quad (5)$$

Đường thẳng tiếp xúc với parabol khi và chỉ khi phương trình (5) có nghiệm kép, tức là

$$\Delta = (m + 2)^2 - 4(m + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 2)(m - 2) = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ hoặc } m = -2.$$

Vậy có hai tiếp tuyến của parabol đã cho đi qua điểm A . Đó là hai đường thẳng

$$y = 2(x - 1) - 2 \text{ hay } y = 2x - 4$$

$$\text{và } y = -2(x - 1) - 2 \text{ hay } y = -2x.$$

Câu hỏi và bài tập

57. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (\mathcal{C}) của hàm số

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1.$$

b) Tìm các giao điểm của đường cong (\mathcal{C}) và parabol

$$(P): g(x) = 2x^2 + 1.$$

- c) Viết phương trình các tiếp tuyến của (\mathcal{C}) và (\mathcal{P}) tại mỗi giao điểm của chúng.
d) Xác định các khoảng trên đó (\mathcal{C}) nằm phía trên hoặc phía dưới (\mathcal{P}) .

58. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{2x - 1}{x + 1}.$$

b) Với các giá trị nào của m , đường thẳng d_m đi qua điểm $A(-2; 2)$ và có hệ số góc m cắt đồ thị của hàm số đã cho

- Tại hai điểm phân biệt ?
- Tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị ?

59. Chứng minh rằng các đồ thị của ba hàm số

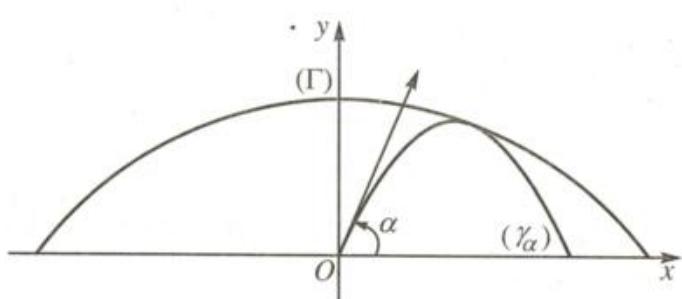
$$f(x) = -x^2 + 3x + 6, \quad g(x) = x^3 - x^2 + 4 \quad \text{và} \quad h(x) = x^2 + 7x + 8$$

tiếp xúc với nhau tại điểm $A(-1; 2)$ (tức là chúng có cùng tiếp tuyến tại A).

60. Chứng minh rằng các đồ thị của hai hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x$ và $g(x) = \frac{3x}{x+2}$

tiếp xúc với nhau. Xác định tiếp điểm của hai đường cong trên và viết phương trình tiếp tuyến chung của chúng tại điểm đó.

61. Một viên đạn được bắn ra với vận tốc ban đầu $v_0 > 0$ từ một nòng súng đặt ở gốc toạ độ O , nghiêng một góc α với mặt đất (nòng súng nằm trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy và tạo với trục hoành Ox góc α) (h.1.21). Biết quỹ đạo chuyển động của viên đạn là parabol.



Hình 1.21

$$(\gamma_\alpha) : \quad y = -\frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) x^2 + x \tan \alpha$$

(g là gia tốc trọng trường).

Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$, (γ_α) luôn tiếp xúc với parabol (Γ) có phương trình là

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

và tìm tọa độ tiếp điểm ((Γ) được gọi là *parabol an toàn*).

Luyện tập

62. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x-1}{x+1}.$$

b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận của đường cong đã cho là tâm đối xứng của nó.

63. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (\mathcal{H}) của hàm số

$$y = \frac{x+2}{2x+1}.$$

b) Chứng minh rằng đường thẳng $y = mx + m - 1$ luôn đi qua một điểm cố định của đường cong (\mathcal{H}) khi m biến thiên.

c) Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng đã cho cắt đường cong (\mathcal{H}) tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của (\mathcal{H}) .

64. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 - bx}{x-1}$.

a) Tìm a và b biết rằng đồ thị (\mathcal{C}) của hàm số đã cho đi qua điểm $A\left(-1; \frac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến của (\mathcal{C}) tại điểm $O(0; 0)$ có hệ số góc bằng -3 .

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với các giá trị của a và b đã tìm được.

65. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

b) Với các giá trị nào của m đường thẳng $y = m - x$ cắt đồ thị của hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt?

c) Gọi A và B là hai giao điểm đó. Tìm tập hợp các trung điểm M của đoạn thẳng AB khi m biến thiên.

66. Tìm các hệ số a và b sao cho parabol $y = 2x^2 + ax + b$ tiếp xúc với hyperbol

$$y = \frac{1}{x} \text{ tại điểm } M\left(\frac{1}{2}; 2\right).$$

67. Một tạp chí được bán với giá 20 nghìn đồng một cuốn. Chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm : lương cán bộ, công nhân viên, giấy in, ...) được cho bởi

$$C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000,$$

$C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

1°. a) Tính tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí.

b) Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất.

2°. Các khoản thu bao gồm tiền bán tạp chí và 90 triệu đồng nhận được từ quảng cáo và sự trợ giúp cho báo chí. Giả sử số cuốn in ra đều được bán hết.

a) Chứng minh rằng số tiền lãi khi in x cuốn tạp chí là

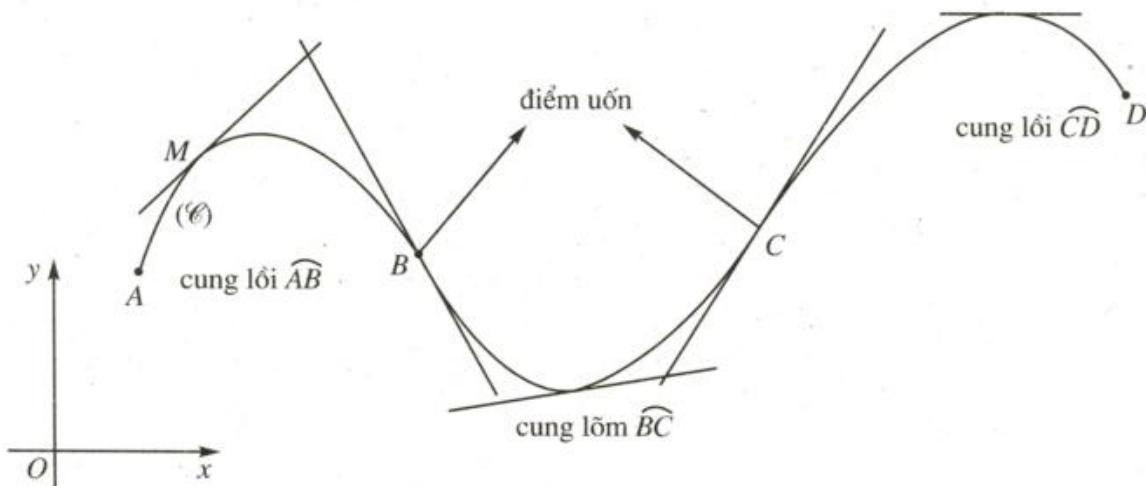
$$L(x) = -0,0001x^2 + 1,8x - 1000.$$

b) Hỏi in bao nhiêu cuốn thì có lãi?

c) In bao nhiêu cuốn thì lãi nhiều nhất? Tính số tiền lãi đó.

Bài đọc thêm

TÍNH LỒI, LỐM VÀ ĐIỂM UỐN CỦA ĐƯỜNG CONG



Hình 1.22

Đường cong (\mathcal{C}) trên hình 1.22 gồm ba cung \widehat{AB} , \widehat{BC} và \widehat{CD} . Ta thấy tiếp tuyến của đường cong tại mỗi điểm M của cung \widehat{AB} đều nằm phía trên của cung ; người ta gọi \widehat{AB} là một cung lồi. Trái lại, tiếp tuyến tại mỗi điểm của cung \widehat{BC} nằm phía dưới của cung ; \widehat{BC} được gọi là một cung lõm. Điểm B là điểm phân chia hai cung lồi và cung lõm của đường cong ; người ta gọi nó là một điểm uốn của đường cong (\mathcal{C}).

Tương tự, C cũng là một điểm uốn vì nó phân chia cung lõm \widehat{BC} và cung lồi \widehat{CD} . Ta cũng thấy tiếp tuyến của đường cong tại điểm uốn xuyên qua đường cong.

Sau đây ta sẽ giới thiệu các khái niệm đã nêu một cách chính xác.

1. Tính lồi, lõm của đồ thị

Định nghĩa. Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I . Ta nói rằng

- Đồ thị (\mathcal{C}) của hàm số $y = f(x)$ lồi trên khoảng I nếu tiếp tuyến của (\mathcal{C}) tại mỗi điểm của nó đều nằm phía trên đồ thị.
- Đồ thị (\mathcal{C}) của hàm số $y = f(x)$ lõm trên khoảng I nếu tiếp tuyến của (\mathcal{C}) tại mỗi điểm của nó đều nằm phía dưới đồ thị.

Ta thừa nhận định lí sau đây.

Định II. Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp hai trên khoảng I . Khi đó

a) Nếu $f''(x) < 0$ với mọi $x \in I$ thì đồ thị (\mathcal{C}) của hàm số $y = f(x)$ lồi trên I .

b) Nếu $f''(x) > 0$ với mọi $x \in I$ thì đồ thị (\mathcal{C}) của hàm số $y = f(x)$ lõm trên I .

Ví dụ 1. Xét tính lồi, lõm của hai parabol $f(x) = x^2$ và $g(x) = -x^2$.

Giải. Ta có $f'(x) = 2x$ và $f''(x) = 2$.

Vì $f''(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên parabol $f(x) = x^2$ lõm trên \mathbb{R} .

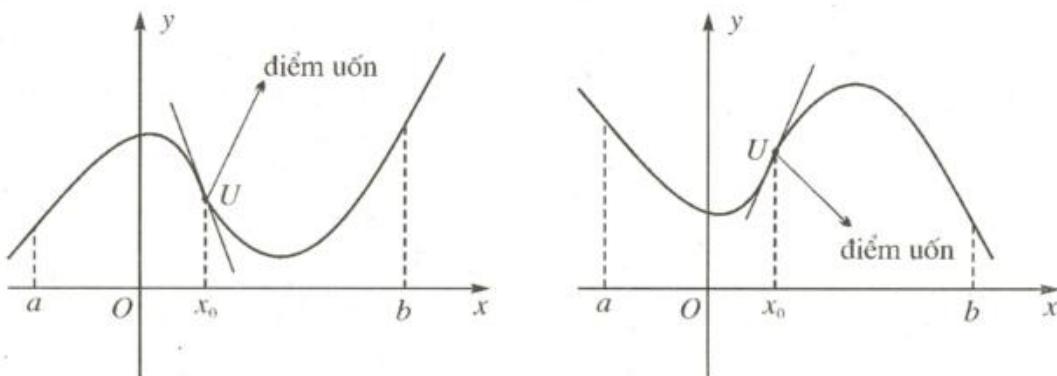
Trái lại, vì $g''(x) = -2 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên parabol $g(x) = -x^2$ lồi trên \mathbb{R} .

Có thể thấy ngay điều khẳng định trên từ định nghĩa. Tiếp tuyến của parabol $f(x) = x^2$ tại mỗi điểm của nó đều nằm phía dưới đồ thị và tiếp tuyến của parabol $g(x) = -x^2$ tại mỗi điểm của nó đều nằm phía trên đồ thị.

Chú ý. Điều kiện nêu trong định lí trên chỉ là điều kiện đủ chứ không phải là điều kiện cần của tính lồi, lõm của đồ thị. Chẳng hạn, đường cong $f(x) = x^4$ là lõm trên \mathbb{R} vì tiếp tuyến của đường cong tại mỗi điểm của nó đều nằm phía dưới đường cong. Tuy nhiên, ta có $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f''(x) = 0$ tại $x = 0$.

2. Điểm uốn của đồ thị

Định nghĩa. Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(a ; b)$ chứa điểm x_0 . Nếu đồ thị (\mathcal{C}) của hàm số $y = f(x)$ lồi trên một trong hai khoảng $(a ; x_0)$, $(x_0 ; b)$ và lõm trên khoảng còn lại thì $U(x_0 ; f(x_0))$ được gọi là điểm uốn của đồ thị (\mathcal{C}) (h.1.23).



Hình 1.23

Nói một cách khác, điểm uốn của đồ thị là điểm phân chia hai phần lồi và lõm của đồ thị.

Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn luôn xuyên qua đồ thị.

Từ định lí về tính lồi, lõm của đồ thị, dễ dàng suy ra

Định II. Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp hai trên khoảng I chứa điểm x_0 . Nếu $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì $U(x_0 ; f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ 2. Tìm các khoảng lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị hàm số

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + \frac{4}{3}.$$

Giải. Ta có $y' = -x^2 + 2x + 3$ và $y'' = -2x + 2$.

Bảng xét dấu của y'' :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y''	+	0	-
y		5	

Vì $y'' > 0$ trên khoảng $(-\infty; 1)$ nên đồ thị (\mathcal{C}) của hàm số lõm trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Vì $y'' < 0$ trên khoảng $(1; +\infty)$ nên đồ thị (\mathcal{C}) lồi trên khoảng $(1; +\infty)$.

$U(1; 5)$ là điểm uốn của đồ thị (\mathcal{C}).