§ 2 MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Cơ sở của phương pháp đổi biến số là định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

> Cho hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K và hàm số $y = f(u)$ liên tục sao cho $f[u(x)]$ xác định trên K. Khi đó nếu F là một nguyên hàm của f, tức là $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$ thì
>
> $$\int f[u(x)]u'(x)\,\mathrm{d}x = F[u(x)] + C. \qquad (1)$$

Chứng minh

Theo quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp, ta có

$$(F[u(x)] + C)' = F'\big[u(x)\big]u'(x) = f\big[u(x)\big]u'(x).$$

Vậy ta có (1). □

CHÚ Ý

Trong thực hành, ta thường viết tắt $F[u(x)]$ là $F(u)$, $f[u(x)]$ là $f(u)$ và coi $\mathrm{d}u$ là vi phân của hàm số $u = u(x)$ (nghĩa là $\mathrm{d}u = \mathrm{d}u(x) = u'(x)\mathrm{d}x$). Khi đó, công thức (1) được viết như sau :

$$\int f\big[u(x)\big]u'(x)\mathrm{d}x = \int f\big[u(x)\big]\mathrm{d}u(x) = \int f(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= F(u) + C = F\big[u(x)\big] + C. \qquad (2)$$

Ta nói đã thực hiện phép đổi biến $u = u(x)$.

Ví dụ 1. Tìm $\int (2x+1)^4\,\mathrm{d}x$.

Giải. Ta có $(2x+1)^4\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}(2x+1)^4(2x+1)'\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}(2x+1)^4\mathrm{d}(2x+1)$.

Đặt $u = u(x) = 2x+1$. Áp dụng công thức (2), ta có

$$\int(2x+1)^4\,\mathrm{d}x = \int\frac{1}{2}(2x+1)^4\mathrm{d}(2x+1) = \int\frac{1}{2}u^4\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int u^4\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{10}(2x+1)^5 + C.$$

H1 *Tìm* $\int 2x(x^2+1)^3\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 2. Tìm $\displaystyle\int\frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$.

Giải. Ta có

$$\frac{2x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+4}} = \frac{(x^2+4)'}{\sqrt[3]{x^2+4}}\mathrm{d}x = (x^2+4)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}(x^2+4).$$

Đặt $u = x^2+4$. Áp dụng công thức (2), ta có

$$\int\frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,\mathrm{d}x = \int(x^2+4)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}(x^2+4) = \int u^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}(x^2+4)^{\frac{2}{3}} + C.$$

Ví dụ 3. Tìm $\int\cos(7x+5)\mathrm{d}x$.

Giải. Ta có

$$\cos(7x+5)\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\cos(7x+5)(7x+5)'\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\cos(7x+5)\,\mathrm{d}(7x+5).$$

Đặt $u = 7x+5$. Công thức (2) cho ta

$$\int\cos(7x+5)\,\mathrm{d}x = \int\frac{1}{7}\cos(7x+5)\,\mathrm{d}(7x+5) = \int\frac{1}{7}\cos u\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{7}\sin u + C = \frac{1}{7}\sin(7x+5) + C.$$

Ví dụ 4. Tìm $\int \mathrm{e}^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x$.

Giải. Ta có

$$\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}(\sin x).$$

Đặt $u = \sin x$. Công thức (2) cho ta

$$\int e^{\sin x} \cos x \, dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = \int e^u du = e^u + C = e^{\sin x} + C.$$

H2 *Tìm* $\int x e^{1+x^2} dx$.

2. Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần

Cơ sở của phương pháp lấy nguyên hàm từng phần là định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 2

> Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì
> $$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Công thức trên gọi là *công thức lấy nguyên hàm từng phần* (gọi tắt là *công thức nguyên hàm từng phần*) và được viết gọn dưới dạng

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Chứng minh

Ta cần chứng tỏ vế phải là một nguyên hàm của uv'. Thật vậy

$$\left(u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx\right)' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x) - \left(\int v(x)u'(x)dx\right)'$$
$$= u(x)v'(x) + v(x)u'(x) - v(x)u'(x) = u(x)v'(x).$$ □

Ví dụ 5. Tìm $\int x \cos x \, dx$.

Giải

Đặt $u(x) = x$, $v'(x) = \cos x$. Khi đó $u'(x) = 1$, $v(x) = \sin x$ (chỉ cần lấy một nguyên hàm của v'). Theo công thức nguyên hàm từng phần, ta có

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Ví dụ 6. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = \ln x$.

Giải

Đặt $u = u(x) = \ln x$, $dv = dx$. Khi đó $du = \frac{1}{x}dx$, $v = v(x) = x$. Theo công thức nguyên hàm từng phần, ta có

$$\int \ln x \, dx = x\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

H3 *Tìm nguyên hàm của hàm số* $f(x) = \frac{x}{3}e^{2x}$.

(Hướng dẫn. Đặt $u(x) = \frac{x}{3}$, $v'(x) = e^{2x}$).

Câu hỏi và bài tập

5. Dùng phương pháp đổi biến số, tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = \dfrac{9x^2}{\sqrt{1-x^3}}$ (*Hướng dẫn*. Đặt $u = 1 - x^3$.) ;

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5x+4}}$ (*Hướng dẫn*. Đặt $u = 5x + 4$) ;

c) $f(x) = x\sqrt[4]{1-x^2}$ (*Hướng dẫn*. Đặt $u = 1 - x^2$) ;

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ (*Hướng dẫn*. Đặt $u = 1 + \sqrt{x}$).

6. Dùng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = x\sin\frac{x}{2}$;

b) $f(x) = x^2\cos x$;

c) $f(x) = xe^x$;

d) $f(x) = x^3\ln(2x)$.

Luyện tập

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

7. a) $f(x) = 3x\sqrt{7-3x^2}$;

b) $f(x) = \cos(3x+4)$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(3x+2)}$;

d) $f(x) = \sin^5\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}$.

8. a) $f(x) = x^2\left(\dfrac{x^3}{18} - 1\right)^5$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$;

c) $f(x) = x^3e^x$;

d) $f(x) = e^{\sqrt{3x-9}}$.

9. a) $f(x) = x^2 \cos 2x$; b) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$;

c) $f(x) = \sin^4 x \cos x$; d) $f(x) = x\cos(x^2)$.