§ 4 MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến số

Cơ sở của phương pháp đổi biến số là công thức sau đây.

$$\boxed{\int_a^b f[u(x)]u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u, \qquad (1)}$$

trong đó hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K, hàm số $y = f(u)$ liên tục và sao cho hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên K ; a và b là hai số thuộc K.

Công thức (1) được chứng minh như sau :

Gọi F là nguyên hàm của f . Khi đó vế phải của (1) là $F\left[u(b)\right] - F\left[u(a)\right]$.

Theo định lí 1 §2, vế trái của (1) là

$$\left(F[u(x)]\right)\Big|_a^b = F[u(b)] - F[u(a)].$$

Ta thấy vế trái bằng vế phải. Vậy (1) được chứng minh. □

Công thức (1) được gọi là *công thức đổi biến số.*

Phương pháp đổi biến số thường được áp dụng theo hai cách sau đây.

Cách 1. Giả sử ta cần tính $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Nếu ta viết được $g(x)$ dưới dạng $f[u(x)]u'(x)$, thì theo công thức (1) ta có

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Vậy bài toán quy về tính $\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$. Trong nhiều trường hợp việc tính tích phân mới này đơn giản hơn.

Ví dụ 1. Tính $\int_1^2 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Giải

Ta có $x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)$. Đặt $u = x^2$ ta có $u(1) = 1$, $u(2) = 4$. Do đó

$$\int_1^2 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{\mathrm{e}^u}{2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}).$$

$\boxed{\textbf{H1}}$ *Tính* $\int_1^3 \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x$ *bằng cách đặt* $u = 2x+3$.

Cách 2. Giả sử ta cần tính $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $x = x(t)$ $(t \in K)$ và $a, b \in K$ thoả mãn $\alpha = x(a)$, $\beta = x(b)$ thì công thức (1) cho ta

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f[x(t)]x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Vậy bài toán quy về tính $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ (ở đó $g(t) = f[x(t)].x'(t)$). Trong nhiều trường hợp, việc tính tích phân mới này đơn giản hơn.

Ví dụ 2. Tính $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Giải

Đặt $x = \sin t$. Ta có $\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin t) = \cos t\,\mathrm{d}t$, $0 = \sin 0$ và $1 = \sin\frac{\pi}{2}$.

Vậy $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t\,\mathrm{d}t$.

Vì $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ nên $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$. Do đó

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

$\boxed{\textbf{H2}}$ *Tính* $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ *bằng cách đặt* $x = \sin t$.

2. Phương pháp tích phân từng phần

Tương tự như phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, ta cũng có phương pháp tích phân từng phần. Cơ sở của phương pháp này là công thức sau đây.

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx, \qquad (2)}$$

trong đó các hàm số u, v có đạo hàm liên tục trên K và a, b là hai số thuộc K.

Thật vậy, theo định lí 2 §2, ta có

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left(\int u(x)v'(x)\,dx\right)\Big|_a^b = \left(u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx\right)\Big|_a^b$$

$$= \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \left(\int v(x)u'(x)dx\right)\Big|_a^b = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \qquad \square$$

Công thức (2) gọi là *công thức tích phân từng phần* và còn được viết dưới dạng $\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$.

Ví dụ 3. Tính $\int_0^1 x\,e^x dx$.

Giải. Chọn $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$. Khi đó $u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$. Do đó

$$\int_0^1 x\,e^x\,dx = \left(x\,e^x\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - (e-1) = 1.$$

Ví dụ 4. Tính $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

Giải. Chọn $u = \ln x$, $dv = x dx$. Khi đó $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \dfrac{x^2}{2}$. Do đó

$$\int_1^2 x\ln x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

H3 *Tính* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$.

Câu hỏi và bài tập

17. Dùng phương pháp đổi biến số tính các tích phân sau :

a) $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$; c) $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$;

d) $\int_0^1 \frac{5x}{(x^2+4)^2}dx$; e) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}dx$; f) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 3x)\sin 3x\,dx$.

18. Dùng phương pháp tích phân từng phần để tính các tích phân sau :

a) $\int_1^2 x^5 \ln x\,dx$; b) $\int_0^1 (x+1)e^x\,dx$;

c) $\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

Luyện tập

19. Tính a) $\int_0^1 \sqrt{t^5+2t}\,(2+5t^4)\,dt$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos x\,dx$.

20. Tính a) $\int_0^{\pi} 5(5-4\cos t)^{\frac{1}{4}}\sin t\,dt$; b) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

21. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{\sin x}{x}$ trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$.

Khi đó $\int_1^3 \frac{\sin 2x}{x}dx$ là

(A) $F(3) - F(1)$; (B) $F(6) - F(2)$;

(C) $F(4) - F(2)$; (D) $F(6) - F(4)$.

22. Chứng minh rằng

a) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(1-x)\,dx$; b) $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_0^1 [f(x) + f(-x)]\,dx$.

23. Cho $\int_0^1 f(x)\,dx = 3$. Tính $\int_{-1}^0 f(x)\,dx$ trong các trường hợp sau :

a) f là hàm số lẻ ; b) f là hàm số chẵn.

24. Tính các tích phân sau :

a) $\int_1^2 x^2 e^{x^3}\,dx$; b) $\int_1^3 \frac{1}{x}(\ln x)^2\,dx$;

c) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,dx$; d) $\int_0^1 x^2 e^{3x^3}\,dx$; e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$.

25. Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$; b) $\int_0^1 \frac{\ln(2-x)}{2-x}\,dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\,dx$; d) $\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$; e) $\int_1^e x^2 \ln x\,dx$.