§ 1 NGUYÊN HÀM

1. Khái niệm nguyên hàm

Bài toán mở đầu. Vận tốc của một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng tại thời điểm t là $v(t) = 160 - 9{,}8t$ (m/s) (coi $t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên). Tính quãng đường đi được của viên đạn kể từ khi bắn lên cho đến thời điểm t.

Gọi $s(t)$ là quãng đường đi được của viên đạn sau khi bắn được t giây.

Ta đã biết $v(t) = s'(t)$. Do đó ta phải tìm hàm số $s = s(t)$ thoả mãn điều kiện :

$$s'(t) = 160 - 9{,}8t .$$

Nhiều vấn đề của khoa học và kĩ thuật đã dẫn tới bài toán sau đây :

Cho hàm số f xác định trên K, ở đó K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng nào đó. Hãy tìm hàm số F sao cho $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.

ĐỊNH NGHĨA

> Cho hàm số f xác định trên K. Hàm số F được gọi là **nguyên hàm** của f trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.

CHÚ Ý

1) Trong trường hợp $K = [a; b]$, các đẳng thức $F'(a) = f(a)$, $F'(b) = f(b)$ được hiểu là

$$\lim_{x \to a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a) \text{ và } \lim_{x \to b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b).$$

2) Cho hai hàm số f và F liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu F là nguyên hàm của f trên khoảng $(a; b)$ thì có thể chứng minh được rằng $F'(a) = f(a)$ và $F'(b) = f(b)$, do đó F cũng là nguyên hàm của f trên đoạn $[a ; b]$.

Ví dụ 1

a) Hàm số $F(x) = \frac{x^3}{3}$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$ vì $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Hàm số $F(x) = \tan x$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ vì $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

c) Hàm số $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$ vì $F'(x) = \sqrt{x}$ với mọi $x \in (0;+\infty)$ và cả hai hàm số f và F đều liên tục trên $[0;+\infty)$.

H1 *Các hàm số $F_1(x) = -2\cos 2x$ và $F_2(x) = -2\cos 2x + 2$ là những nguyên hàm của hàm số nào ?*

ĐỊNH LÍ 1

> Giả sử hàm số F là một nguyên hàm của hàm số f trên K. Khi đó
>
> a) Với mỗi hằng số C, hàm số $y = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của f trên K.
>
> b) Ngược lại, với mỗi nguyên hàm G của f trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi x thuộc K.

Chứng minh

a) Giả sử $G(x) = F(x) + C$. Khi đó $G'(x) = F'(x) = f(x)$.

b) Đặt $H(x) = G(x) - F(x)$, ta có $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ với mọi $x \in K$. Vậy H là hàm số không đổi trên K, tức là $H(x) = C$ với C là một hằng số. Suy ra $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in K$. □

Ví dụ 2. Tìm nguyên hàm F của hàm số $f(x) = 3x^2$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $F(1) = -1$.

Giải. Dễ thấy $y = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$ nên nguyên hàm F cần tìm có dạng $F(x) = x^3 + C$.

Vì $F(1) = -1$ nên $1^3 + C = -1$, suy ra $C = -2$. Vậy $F(x) = x^3 - 2$.

• Từ định lí 1 ta thấy nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì mọi nguyên hàm của f trên K đều có dạng $F(x) + C$ với $C \in \mathbb{R}$. Vậy $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của f trên K.

Họ tất cả các nguyên hàm của f trên K được kí hiệu là $\int f(x)\mathrm{d}x$. Vậy

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Người ta cũng dùng kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$ để chỉ một nguyên hàm bất kì của f.

Vậy

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x).$$

(Về kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$ xem bài Em có biết : "Nguồn gốc của kí hiệu nguyên hàm và tích phân" tr. 157).

• Người ta đã chứng minh được rằng : *Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.*

• Từ đây, trong các bài toán về nguyên hàm của một hàm số, nếu không nói gì thêm, ta luôn giả thiết rằng hàm số đó là liên tục và nguyên hàm của nó được xét trên mỗi khoảng (nửa khoảng, đoạn) xác định của hàm số đó.

2. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Bài toán tìm nguyên hàm là bài toán ngược với bài toán tìm đạo hàm. Việc tìm nguyên hàm của một hàm số thường được đưa về tìm nguyên hàm của các hàm số đơn giản hơn. Sau đây là nguyên hàm của một số hàm số đơn giản thường gặp.

1) $\int 0\,\mathrm{d}x = C$, $\int \mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + C$;

2) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$;

3) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$;

4) Với k là hằng số khác 0

a) $\int \sin kx\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\cos kx}{k} + C$;

b) $\int \cos kx\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin kx}{k} + C$;

c) $\int \mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^{kx}}{k} + C$;

d) $\int a^{x}\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C \; (0 < a \neq 1)$;

5) a) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$;

b) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C.$

Ta dễ dàng chứng minh các công thức trên bằng cách tính đạo hàm vế phải. Chẳng hạn, vì $\left(\dfrac{\sin kx}{k}\right)' = \cos kx$ nên ta có công thức 4) b).

Ví dụ 3

a) $\int 4x^4\mathrm{d}x = \dfrac{4}{5}x^5 + C.$

b) $\int \sqrt{x}\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$

c) $\int \cos\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sin\dfrac{x}{2} + C.$

H2 *Tìm* *a)* $\int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$; *b)* $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

3. Một số tính chất cơ bản của nguyên hàm

ĐỊNH LÍ 2

Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì

a) $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$;

b) Với mọi số thực $k \neq 0$ ta có

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x.$$

Chứng minh. a) Ta cần chứng tỏ rằng vế phải là một nguyên hàm của $f+g$. Thật vậy ta có

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x\right)' = \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' + \left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)+g(x).$$

b) Chứng minh tương tự. □

Dựa vào nguyên hàm của các hàm số thường gặp và vận dụng hai định lí trên ta có thể tính được nguyên hàm của nhiều hàm số khác.

Ví dụ 4. Tìm

a) $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$;

b) $\int (x-1)(x^4+3x)\mathrm{d}x$;

c) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Giải

a) $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{x}}{2}\mathrm{d}x + \int \frac{2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x + 2\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + 4\sqrt{x} + C.$$

b) $\int (x-1)(x^4+3x)\,dx = \int (x^5 - x^4 + 3x^2 - 3x)\,dx$

$= \int x^5\,dx - \int x^4\,dx + \int 3x^2\,dx - \int 3x\,dx$

$= \dfrac{x^6}{6} - \dfrac{x^5}{5} + x^3 - \dfrac{3x^2}{2} + C.$

c) $\int \sin^2 x\,dx = \int \dfrac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \dfrac{1}{2}\int dx - \dfrac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4} + C.$

H3 *Tìm*

a) $\int (x^3 + 2x^2 - 4)\,dx$; b) $\int \cos^2 x\,dx$.

Câu hỏi và bài tập

1. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = 3x^2 + \dfrac{x}{2}$; b) $f(x) = 2x^3 - 5x + 7$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - x^2 - \dfrac{1}{3}$; d) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$; e) $f(x) = 10^{2x}$.

2. Tìm

a) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\,dx$; b) $\int \dfrac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x^2}\,dx$;

c) $\int 4\sin^2 x\,dx$; d) $\int \dfrac{1+\cos 4x}{2}\,dx$.

3. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây :

Nguyên hàm của hàm số $y = x\sin x$ là

(A) $x^2 \sin\dfrac{x}{2} + C$; (B) $-x\cos x + C$; (C) $-x\cos x + \sin x + C$.

4. Khẳng định sau đúng hay sai ?

Nếu $f(x) = (1 - \sqrt{x})'$ thì $\int f(x)\,dx = -\sqrt{x} + C$.