§ 8 HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

Khi giải hệ phương trình mũ và lôgarit, ta cũng dùng các phương pháp giải hệ phương trình đã học như phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, phương pháp đặt ẩn phụ, ...

Trong phần này, ta chỉ xét một vài ví dụ đơn giản.

Ví dụ 1. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^{x+y} + 3^y = 5 \\ 2^{x+y}3^{y-1} = 2. \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $u = 2^{x+y}$ và $v = 3^y$ $(u > 0, v > 0)$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6. \end{cases} \quad (2)$$

Dễ thấy hệ (2) có hai nghiệm là $(u ; v) = (2 ; 3)$ và $(u ; v) = (3 ; 2)$. Các giá trị này đều thoả mãn điều kiện $u > 0$ và $v > 0$. Do đó, ta phải giải hai hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 2 \\ 3^y = 3, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 3 \\ 3^y = 2. \end{cases} \quad (4)$$

Ta có $\quad (3) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$

H1 *Tiếp tục giải hệ (4) và kết luận về nghiệm của hệ (1).*

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^{2x-y} + 2^x = 2^{1+y} \\ \log_2 x.(\log_4 y - 1) = 4. \end{cases} \qquad (5)$$

Giải

Trước hết, ta xét phương trình thứ nhất trong hệ (5) :

$$2^{2x-y} + 2^x = 2^{1+y}. \qquad (6)$$

Nhân hai vế của phương trình (6) với 2^{-y}, ta được phương trình $2^{2(x-y)} + 2^{x-y} = 2$.

Đặt $2^{x-y} = t$ $(t > 0)$, ta được phương trình $t^2 + t - 2 = 0$; phương trình này có hai nghiệm là $t = 1$ và $t = -2$, trong đó chỉ có nghiệm $t = 1$ là thích hợp. Vậy

$$(6) \Leftrightarrow 2^{x-y} = 1 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Đem kết quả này thế vào phương trình thứ hai của hệ (5), ta được

$$\left(\frac{1}{2}\log_2 x - 1\right)\log_2 x = 4 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = -2 \\ \log_2 x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2^{-2} \\ x = 2^4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4} \\ x = 16. \end{array}\right.$$

Kết luận : Hệ (5) có hai nghiệm là $(x ; y) = \left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$ và $(x ; y) = (16 ; 16)$.

H2 *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} xy = 1 \\ \log^2 x + \log^2 y = 2. \end{cases}$

Câu hỏi và bài tập

Giải các hệ phương trình (bài 72 và bài 73) :

72. a) $\begin{cases} x + y = 20 \\ \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 4^{-2x} + 4^{-2y} = 0,5. \end{cases}$

73. a) $\begin{cases} 3^{-x}.2^y = 1152 \\ \log_{\sqrt{5}}(x + y) = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(x + y) - \log_3(x - y) = 1. \end{cases}$

Luyện tập

Giải các phương trình (từ bài 74 đến bài 78) :

74. a) $\log_2(3 - x) + \log_2(1 - x) = 3$; b) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\log(3-x)}$;

c) $7^{\log x} - 5^{\log x+1} = 3.5^{\log x-1} - 13,7^{\log x-1}$; d) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$.

75. a) $\log_3(3^x - 1).\log_3(3^{x+1} - 3) = 12$; b) $\log_{x-1} 4 = 1 + \log_2(x - 1)$;

c) $5\sqrt{\log_2(-x)} = \log_2 \sqrt{x^2}$; d) $3^{\log_4 x + \frac{1}{2}} + 3^{\log_4 x - \frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

76. a) $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}$; b) $4^{\ln x + 1} - 6^{\ln x} - 2.3^{\ln x^2 + 2} = 0$;

c) $3\sqrt{\log_2 x} - \log_2 8x + 1 = 0$; d) $\log^2_{\frac{1}{2}}(4x) + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$.

77. a) $2^{\sin^2 x} + 4.2^{\cos^2 x} = 6$; b) $4^{3+2\cos 2x} - 7.4^{1+\cos 2x} = 4^{\frac{1}{2}}$.

78. a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 4$; b) $\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^x + \left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^x = 1$.

79. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 3.2^x + 2.3^y = 2,75 \\ 2^x - 3^y = -0,75 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 7.\log_7 y = 1 + \log_5 2 \\ 3 + \log_2 y = \log_2 5(1 + 3\log_5 x). \end{cases}$