§ 7 PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

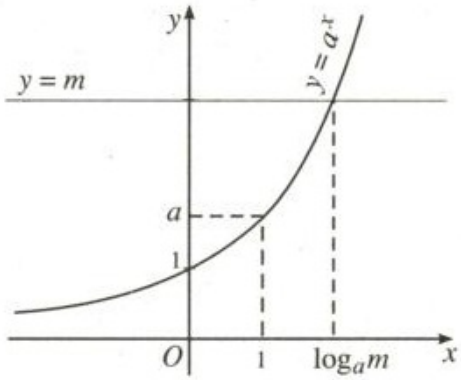
Trên thực tế, nhiều bài toán dẫn đến việc giải phương trình dạng $a^x = m$ hoặc $\log_a x = m$, trong đó m và a là những số cho trước với $0 < a \neq 1$. Đó là những dạng đơn giản của *phương trình mũ* và *phương trình lôgarit*.

Trong bài này, ta vẫn giả thiết a là một số cho trước, dương và khác 1.

1. Phương trình cơ bản

• *Phương trình mũ cơ bản* có dạng $a^x = m$, trong đó m là số đã cho. Phương trình này xác định với mọi x.

Dễ thấy rằng khi $m \leq 0$, đường thẳng $y = m$ không cắt đồ thị hàm số $y = a^x$; còn khi $m > 0$, đường thẳng $y = m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = a^x$ tại đúng một điểm (h.2.11). Do đó



Hình 2.11

Nếu $m \leq 0$ thì phương trình $a^x = m$ vô nghiệm ;

Nếu $m > 0$ thì phương trình $a^x = m$ có một nghiệm duy nhất $x = \log_a m$. Nói cách khác,

$$\forall m \in (0 ; +\infty),\ a^x = m \Leftrightarrow x = \log_a m.$$

Ví dụ 1. a) $3^x = 9 \Leftrightarrow x = \log_3 9 \Leftrightarrow x = 2$;

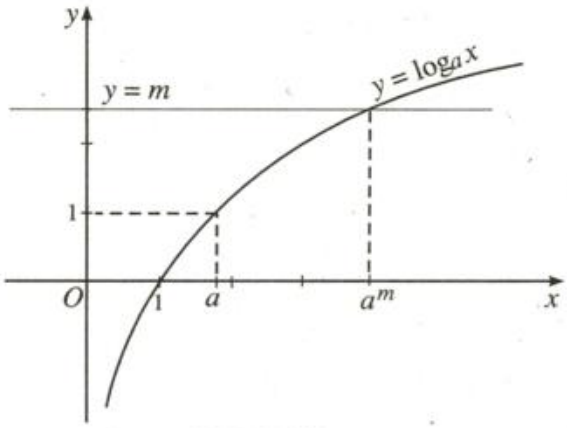
b) $10^x = 1 \Leftrightarrow x = \log 1 \Leftrightarrow x = 0$.

H1 *Giải các phương trình sau :*

a) $2^x = 8$; *b)* $e^x = 5$.

• *Phương trình lôgarit cơ bản* có dạng $\log_a x = m$, trong đó m là số đã cho. Điều kiện xác định của phương trình này là $x > 0$.

Dễ thấy đường thẳng $y = m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = \log_a x$ tại đúng một điểm (h.2.12). Do đó



Hình 2.12

Với mỗi giá trị tuỳ ý của m, phương trình $\log_a x = m$ luôn có một nghiệm duy nhất $x = a^m$. Nói cách khác,

$$\forall m \in (-\infty ; +\infty),\ \log_a x = m \Leftrightarrow x = a^m.$$

Ví dụ 2. $\log_2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$;

$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 \Leftrightarrow x = 1$.

H2 *Giải các phương trình sau :*

a) $\log_3 x = \log_3 5$; *b)* $\log x = -4$.

Từ đó hãy cho biết nghiệm của phương trình $\log_a x = \log_a p$, $(p > 0)$.

2. Một số phương pháp giải phương trình mũ và lôgarit

a) Phương pháp đưa về cùng cơ số

Trong bài trước, ta đã biết các tính chất :

(i) $a^{\alpha} = a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha = \beta$;

(ii) Nếu $\alpha > 0, \beta > 0$ thì $\log_a \alpha = \log_a \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Các tính chất đó cho phép ta giải một số dạng phương trình mũ (hoặc phương trình lôgarit) bằng cách đưa các luỹ thừa (hoặc các lôgarit) trong phương trình về luỹ thừa (hoặc lôgarit) với cùng một cơ số. Sau đây là một số ví dụ.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$9^{x+1} = 27^{2x+1}. \qquad (1)$$

Giải

Nhận xét rằng ta có thể đưa hai vế của phương trình về luỹ thừa của cùng cơ số 3.

$$9^{x+1} = 3^{2(x+1)} \text{ và } 27^{2x+1} = 3^{3(2x+1)}.$$

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow 3^{2(x+1)} = 3^{3(2x+1)} \Leftrightarrow 2(x+1) = 3(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow -4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{1}{4}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$\log_2 \frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 1). \qquad (2)$$

Giải

Điều kiện xác định của phương trình (2) là $x > 0$ và $x^2 - x - 1 > 0$.

Với điều kiện đó, do $\log_2 \frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{2}} x$ nên phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 1) \text{ hay } x = x^2 - x - 1.$$

Bởi vậy, ta có thể viết

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x - 1 > 0 \\ x = x^2 - x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = x^2 - x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 1 + \sqrt{2} \text{ hoặc } x = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1 + \sqrt{2}$.

H3 *Một bạn giải phương trình* $\log_4 x^2 = \log_2 5$ *như sau : Vì* $\log_4 x^2 = \log_2 x$ *nên*

$$\log_4 x^2 = \log_2 5 \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 5 \Leftrightarrow x = 5.$$

Lời giải đó đúng hay sai ?

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$\log_4(x + 12) \,.\, \log_x 2 = 1. \qquad (3)$$

Giải

Để vế trái của (3) có nghĩa, ta phải có $x + 12 > 0$ và $0 < x \neq 1$. Vậy điều kiện xác định của phương trình (3) là $0 < x \neq 1$.

Khi đó, $\log_2 x \neq 0$ và $\log_x 2 = \dfrac{1}{\log_2 x}$, thành thử với điều kiện $0 < x \neq 1$, ta có

$$(3) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(x + 12).\ \frac{1}{\log_2 x} = 1 \Leftrightarrow \log_2(x + 12) = \log_2 x^2 \Leftrightarrow x + 12 = x^2.$$

Do đó, ta có thể viết

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 12 = x^2 \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 12 = 0 \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ hoặc } x = 4 \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy phương trình (3) có nghiệm duy nhất $x = 4$. □

Đưa về cùng cơ số là phương pháp rất hay dùng khi giải các phương trình mũ và phương trình lôgarit. Nó thường được dùng kết hợp với các phương pháp khác mà ta sẽ nêu dưới đây.

b) Phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 6. Giải phương trình $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$.

Giải

Ta có thể viết $3^{2x+5} = 3.\,3^{2x+4} = 3.\,3^{2(x+2)} = 3.\left(3^{x+2}\right)^2$.

Vì vậy, nếu đặt $y = 3^{x+2}$ (với $y > 0$) thì phương trình đã cho có dạng $3y^2 = y + 2$, hay $3y^2 - y - 2 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm $y = 1$ và $y = -\frac{2}{3}$, nhưng chỉ có $y = 1$ là thích hợp. Do đó

$$3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2 \Leftrightarrow 3^{x+2} = 1 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -2$.

H4 *Giải phương trình* $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$ *bằng cách đặt ẩn phụ* $y = 2^{x-3}$.

Ví dụ 7. Xét phương trình $\dfrac{6}{\log_2 2x} + \dfrac{4}{\log_2 x^2} = 3.$ (4)

Dễ thấy điều kiện xác định của phương trình là $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$ và $x \neq 1$. Với điều kiện đó, ta có

$$(4) \Leftrightarrow \frac{6}{1 + \log_2 x} + \frac{4}{2\log_2 x} = 3. \qquad (5)$$

H5 *Giải phương trình (5) bằng cách đặt* $y = \log_2 x$ *rồi kết luận về tập nghiệm của (4).*

c) Phương pháp lôgarit hoá

Tính chất (ii) đã nêu còn cho phép giải phương trình có hai vế luôn dương bằng cách lấy lôgarit hai vế (theo cùng một cơ số thích hợp nào đó). Việc làm đó gọi là *lôgarit hoá* hai vế của phương trình.

Ví dụ 8. Giải phương trình $3^{x-1}.2^{x^2} = 8.4^{x-2}$.

Giải

Dễ thấy hai vế của phương trình xác định với mọi x và luôn nhận giá trị dương. Do đó có thể lôgarit hoá hai vế theo cơ số 2. Ta có

$$3^{x-1}.2^{x^2} = 8.4^{x-2} \Leftrightarrow (x-1)\log_2 3 + x^2 = \log_2 8 + (x-2)\log_2 4$$
$$\Leftrightarrow x^2 - (2 - \log_2 3)x + 1 - \log_2 3 = 0.$$

Phương trình bậc hai cuối cùng có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 1 - \log_2 3$. Đó cũng là hai nghiệm của phương trình đã cho. □

Lôgarit hoá là phương pháp khá thông dụng trong việc giải phương trình mũ. Khi lôgarit hoá, ta cần khéo chọn cơ số để lời giải được gọn.

H6 *Bằng phương pháp lôgarit hoá, giải phương trình* $2^x.5^x = 0,2.(10^{x-1})^5$.

d) Phương pháp sử dụng tính đồng biến hay nghịch biến của hàm số

Ví dụ 9. Giải phương trình $2^x = 2 - \log_3 x$.

Giải

Dễ thấy $x = 1$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Ta sẽ chứng minh rằng phương trình không còn nghiệm nào khác.

Thật vậy, điều kiện xác định của phương trình là $x > 0$, tức là $x \in (0 ; +\infty)$. Trên khoảng đó, hàm số $y = 2^x$ đồng biến trong khi hàm số $y = 2 - \log_3 x$ nghịch biến.

Ta xét hai trường hợp :

– Nếu $x > 1$ thì $\log_3 x > 0$ và $2^x > 2$. Do đó $2 - \log_3 x < 2 < 2^x$. Điều đó chứng tỏ trên khoảng $(1 ; +\infty)$, không có giá trị nào của x là nghiệm của phương trình đã cho.

– Nếu $0 < x < 1$ thì $\log_3 x < 0$ và $2^x < 2$. Do đó $2 - \log_3 x > 2 > 2^x$. Điều đó chứng tỏ trên khoảng $(0 ; 1)$, không có giá trị nào của x là nghiệm của phương trình đã cho.

Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu hỏi và bài tập

63. Giải các phương trình sau :

a) $(2 + \sqrt{3})^{2x} = 2 - \sqrt{3}$;

b) $2^{x^2-3x+2} = 4$;

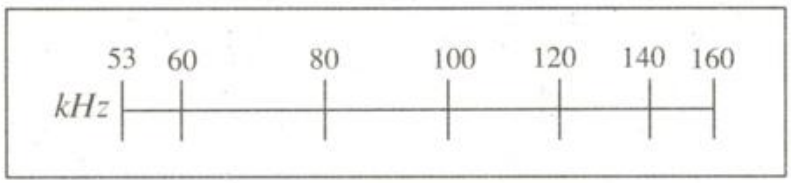
c) $2 . 3^{x+1} - 6 . 3^{x-1} - 3^x = 9$;

d) $\log_3(3^x + 8) = 2 + x$.

64. Giải các phương trình sau :

a) $\log_2[x(x-1)] = 1$; b) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$.

65. Trên mặt mỗi chiếc rađiô đều có các vạch chia để người sử dụng dễ dàng chọn đúng sóng rađiô cần tìm. Biết rằng vạch chia ở vị trí cách vạch tận cùng bên trái một khoảng d (cm) thì ứng với tần số $F = ka^d$ (kHz), trong đó k và a là hai hằng số được chọn sao cho vạch tận cùng bên trái ứng với tần số 53 kHz, vạch tận cùng bên phải ứng với tần số 160 kHz và hai vạch này cách nhau 12 cm.



a) Hãy tính k và a (tính a chính xác đến hàng phần nghìn).

b) Giả sử đã cho F, hãy giải phương trình $ka^d = F$ với ẩn d.

c) Áp dụng kết quả của b), hãy điền vào ô trống trong bảng sau (kết quả tính chính xác đến hàng phần trăm)

F	53	60	80	100	120	140	160
d							

66. Giải các phương trình sau :

a) $2^{x+1}.5^x = 200$; b) $0{,}125.4^{2x-3} = (4\sqrt{2})^x$.

67. Giải các phương trình sau :

a) $\log_2 x + \log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3}$; b) $\log_{\sqrt{3}} x.\log_3 x.\log_9 x = 8$.

68. Giải các phương trình sau :

a) $3^{x+1} + 18.3^{-x} = 29$;

b) $27^x + 12^x = 2.8^x$. (*Hướng dẫn :* Chia cả hai vế cho 2^{3x} rồi đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$).

69. Giải các phương trình sau :

a) $\log^2 x^3 - 20\log\sqrt{x} + 1 = 0$; b) $\dfrac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \dfrac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}$;

c) $\log_{9x}27 - \log_{3x}3 + \log_9 243 = 0$.

70. Giải các phương trình sau :

a) $3^{4^x} = 4^{3^x}$;

b) $3^{2-\log_3 x} = 81x$;

c) $3^x . 8^{\frac{x}{x+1}} = 36$;

d) $x^6 . 5^{-\log_x 5} = 5^{-5}$.

71. Giải các phương trình sau :

a) $2^x = 3 - x$;

b) $\log_2 x = 3 - x$.